

Mathematikwettbewerb 2000 der Jahrgangsstufe 11

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.

Zugelassene Hilfsmittel: Geodreieck, Zirkel, Formelsammlung, **nicht** jedoch der Taschenrechner

1. Gegeben ist im Koordinatensystem ein Dreieck mit den Ecken $A(4|-3)$, $B(0|5)$ und $C(-5|-3)$.
- Welche Gleichung hat die Gerade durch A und B ?
 - Welche Koordinaten hat das Bild C' von C bei der Spiegelung an der Geraden AB ?
 - Welche Koordinaten hat der Höhenschnittpunkt H ?
 - Wie groß ist die Fläche des Dreiecks ABC ?

2. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen:

a) $y = |1 - |x||$

b) $y = x - [x]$

Hinweis: Mit $[x]$ wird die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x bezeichnet, z.B. $[7,2] = 7$; $[0,9] = 0$; $[\pi] = 3$;
 $[-8,1] = -9$; $[-6] = -6$

c) $y = [\cos x]$

d) $y = (x-1) \operatorname{sgn} x$

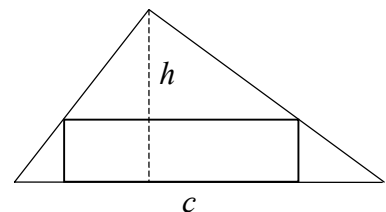
Hinweis: Die Vorzeichen- oder Signumfunktion sgn ist definiert durch

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

3. Gegeben ist ein Dreieck mit der Seite c und der zugehörigen Höhe h .

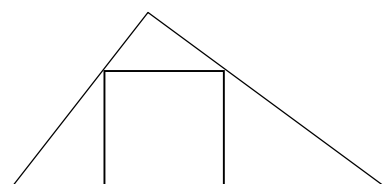
- a) Diesem Dreieck sei ein Rechteck so eingeschrieben, dass eine seiner Seiten auf c liegt und die zwei anderen Ecken auf je einer Seite des Dreiecks liegen (s. Abb.).

Wann hat ein solches Rechteck den größten Flächeninhalt? Wie groß ist diese Fläche?



- b) Unter allen dem Dreieck eingeschriebenen Rechtecken (vgl. a)) gibt es eines mit gleich langen Seiten, d.h. ein Quadrat.

Konstruieren Sie dieses Quadrat!



4. Drei paarweise verschiedene Zahlen x , y und z mit der Summe 9 bilden in der Reihenfolge x , y , z eine arithmetische Folge und in der Reihenfolge y , z , x eine geometrische Folge.

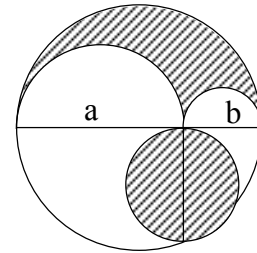
Berechnen Sie x , y und z !

Hinweis: Eine Folge heißt arithmetisch (geometrisch), wenn die Differenz (der Quotient) zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.



5. Gegeben sind zwei Halbkreise mit den Durchmessern a und b , sowie ein Kreis mit dem Durchmesser $a + b$. Die Kreisbögen begrenzen ein sichelförmiges Gebiet (s. Abb.).

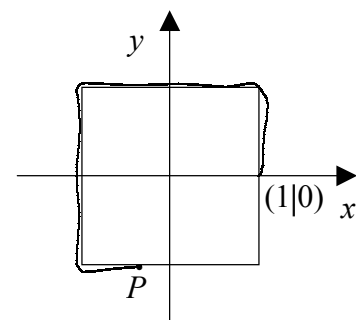
Zeigen Sie, dass die Fläche dieses Gebietes gleich der schraffierten Kreisfläche ist!



6. Wie viele reelle Zahlen x genügen der Gleichung $x^3 = \cos(3\pi \cdot x)$?

Hinweis: Lösen Sie diese Aufgabe graphisch!

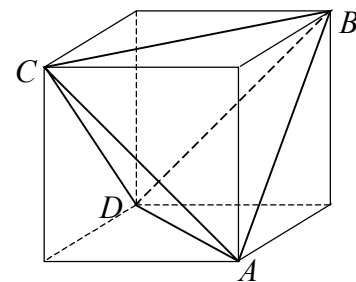
7. In einem Koordinatensystem sei ein Quadrat mit den Ecken $(1|1)$, $(-1|1)$, $(-1|-1)$ sowie $(1|-1)$ gegeben. Man befestige im Punkt $(1|0)$ einen Faden und wickle ihn gegen den Uhrzeigersinn um das Quadrat herum auf. Hat man die Länge s aufgewickelt, so befindet man sich an einem bestimmten Randpunkt P des Quadrats. Man ordnet nun der Fadenlänge s die y -Koordinate von Punkt P zu. Die so definierte Funktion f heiße „Wickelfunktion“.



- a) Zeichnen Sie den Graphen von f im (s,y) -Koordinatensystem! Welche Periode hat f ?
- b) Welche „Wickelfunktion“ erhält man, wenn man das Quadrat durch den Einheitskreis ersetzt?

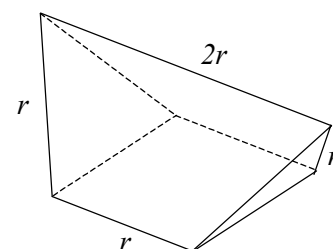
8. a) In einem Würfel mit Kantenlänge a bilden die eingezeichneten Flächendiagonalen das Tetraeder $ABCD$ (s. Abb.).

Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Tetraeders in Abhängigkeit von a !



- b) Der abgebildete Körper hat eine quadratische Grundfläche mit der Seite r . Die obere Kante ist parallel zur Basis und hat die Länge $2r$, alle übrigen Kanten haben die Länge r .

Welches ist das Volumen des Körpers, wenn $r = 6\sqrt{2}$ ist?



Hinweis: Wenn man zwei Exemplare des abgebildeten Körpers mit den Quadratflächen so zusammenlegt, dass Trapezflächen mit Dreiecksflächen aneinander stoßen, dann entsteht ein einfach zu berechnender Körper.

