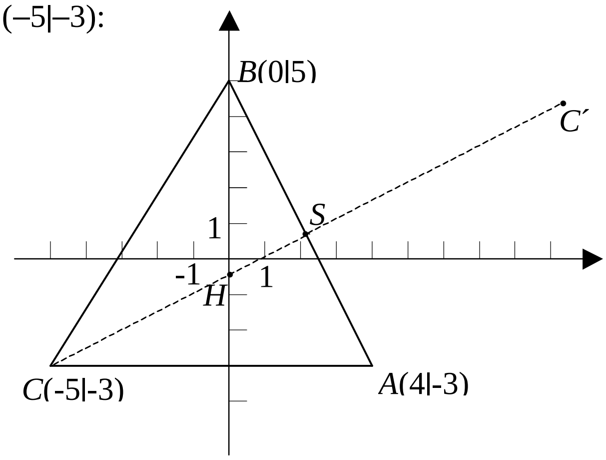
Mathematikwettbewerb 2000 der Jahrgangsstufe 11 – Lösungen

Hinweise zur Bewertung:

- Bei jeder Aufgabe können maximal 12 Punkte erreicht werden, wobei die fünf besten Aufgaben gewertet werden. Insgesamt sind also maximal 60 Punkte zu erreichen.
- Die Punkteverteilung innerhalb einer Aufgabe ist jeweils für einen Lösungsweg angegeben. Bei anderen Lösungen sind die Punkte nach eigenem Ermessen zu verteilen, die angegebene Punktzahl für Teilaufgaben sollte dabei eingehalten werden.
- Es werden keine halben Punkte vergeben.

1. Dreieck mit den Ecken $A\,(4|-3)$, $B\,(0|5)$, $C\,(-5|-3)$:



3 P a) Gerade durch A und B:

$$\boxed{y = -2x + 5}$$

3 P b) Höhe durch C: $y = 0{,}5\,x - 0{,}5$ 1

Höhenfußpunkt: $S(2{,}2|0{,}6)$ 1

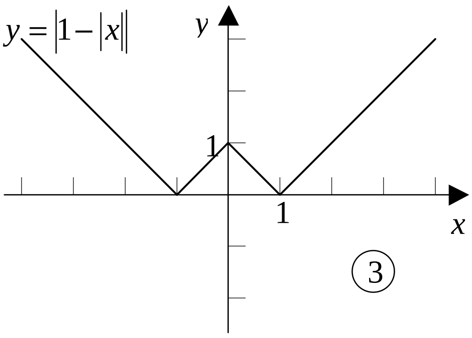
Spiegelpunkt: $\boxed{C'(9{,}4|4{,}2)}$ 1

3 P c) Höhenschnittpunkt: $\boxed{H(0|-0{,}5)}$

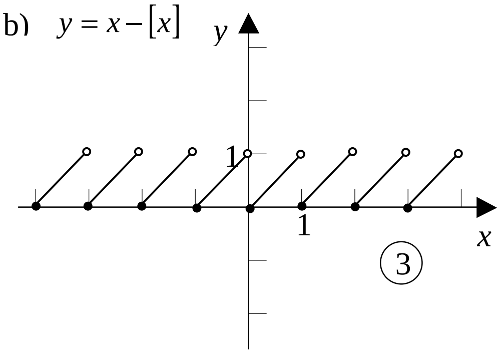
3 P d) Dreiecksfläche: $\boxed{\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36}$

2.

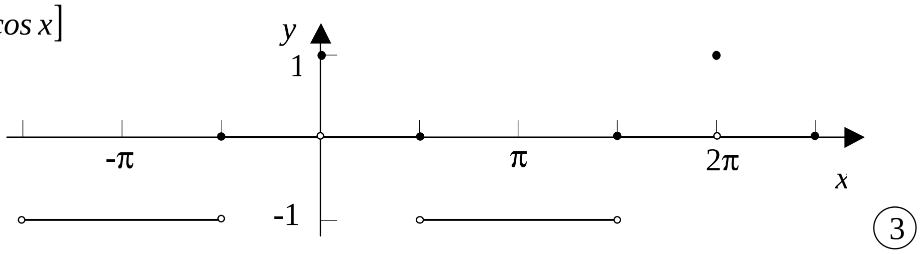
a) $y = \big|1 - |x|\big|$



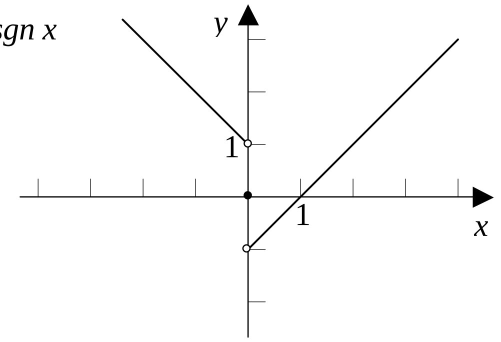
b) $y = x - [x]$



c) $y = [\cos x]$



d) $y = (x-1)\,sgn\,x$



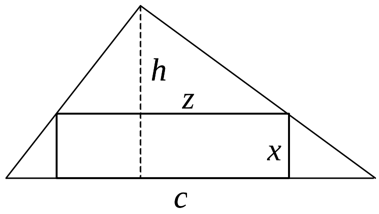
3

3.

8 P a) Rechtecksfläche: $A = x \cdot z$

Nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{z}{c} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow z = \frac{c}{h}\cdot(h-x) \quad 2$$



1

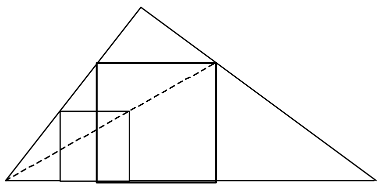
Somit $A = \frac{c}{h}\left(h\cdot x - x^2\right) = \frac{c}{h}\left[\frac{h^2}{4} - \left(x - \frac{h}{2}\right)^2\right]$ 1

2

Die Fläche A ist maximal für $x = \frac{h}{2}$ und somit $z = \frac{c}{2}$ 1

Maximale Fläche: $\boxed{A = \frac{1}{4} c \cdot h}$ 1

4 P b) Das gesuchte Quadrat entsteht durch die zentrische Streckung eines Quadrates, dessen einer Eckpunkt noch nicht auf der Dreiecksseite liegt.



---

4. Summe von x, y, z ist 9 $\Rightarrow$ $x + y + z = 9$ (1) 1

x, y, z ist arithmetische Folge $\Rightarrow$ $y - x = z - y$ (2) 2

y, z, x ist geometrische Folge $\Rightarrow$ $\frac{z}{y} = \frac{x}{z} \Leftrightarrow z^2 = x \cdot y$ (3) 2

Aus (1) und (2) folgt: $y = 3$ und $x = 6 - z$ (4) 2

(4) in (3) eingesetzt: $z^2 + 3z = 18$, also $z = 3$ oder $z = -6$ 2

und somit $x = 3$ oder $x = 12$ 2

Lösung:

$\boxed{(x,y,z) = (12,3,-6)}$ (3, 3, 3) ist keine Lösung, da nicht paarweise verschieden 1

5. **Sichel:** Die Fläche A_1 des sichelförmigen Gebietes ist die Fläche des großen Halbkreises (Durchmesser $a + b$) abzüglich der beiden kleinen Halbkreise (Durchmesser a bzw. b):

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot p - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad 3 \qquad \Rightarrow \quad \boxed{A_1 = \frac{1}{4}ab \cdot p} \quad 3$$

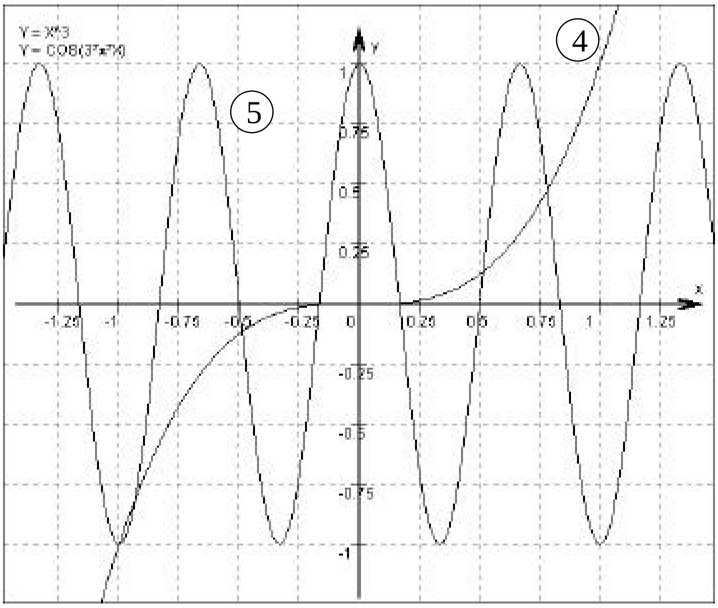
Kreis: Durchmesser des Kreises ist: $\sqrt{ab}$ (Höhensatz) 3

Für die Kreisfläche A_2 gilt somit: $\boxed{A_2 = \left(\frac{\sqrt{ab}}{2}\right)^2 \cdot p = \frac{1}{4}ab \cdot p}$ 3 , d.h. $A_1 = A_2$.

---

6. Die Lösungen der Gleichung $x^3 = cos(3p \cdot x)$ ergeben sich aus den Schnittpunkten der Funktionen $y = x^3$ (Kubische Parabel)

und $y = cos(3p \cdot x)$ (Kosinuskurve mit Periode 2/3)



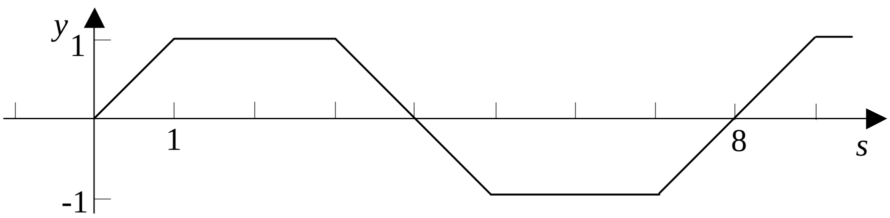
Die beiden Graphen haben 7 Schnittpunkte, die vorgegebene Gleichung demnach

$\boxed{\text{7 Lösungen.}}$ 3

---

7. a)

8 P



6

Die Periode der „Wickelfunktion“ ist der Umfang des Quadrates: 8 2

4 P b) Beim Ersetzen des Quadrates durch den Einheitskreis erhält man die Sinusfunktion. 4

---

8. a) Kantenlänge s des Tetraeders $ABCD$ ist die Flächendiagonale des Würfels: $s = a\sqrt{2}$

6 P

Die **Oberfläche *O*** besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken mit Seite s:

$$O = 4\cdot\frac{s^2}{4}\sqrt{3} = s^2\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{O = 2a^2\sqrt{3}} \qquad 3$$

Das **Volumen *V*** des Tetraeders ist das Würfelvolumen abzüglich von vier Pyramiden mit Grundfläche $a^2/2$ und Höhe a:

$$V = a^3 - 4\cdot\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}\cdot a \quad \Rightarrow \boxed{V = \frac{a^3}{3}} \qquad 3$$

6 P b) Der Körper ist ein halbes Tetraeder mit der Kantenlänge $2r$. 2

Für das Volumen eines Tetraeders mit der Kantenlänge s gilt mit der Formel aus a):

$$\frac{1}{3}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{s^3}{12}\sqrt{2}$$

Für das gesuchte Volumen V gilt somit:

$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2r)^3}{12}\sqrt{2} = \frac{r^3}{3}\sqrt{2} \qquad 3$$

und mit $r = 6\sqrt{2}$: $\boxed{V = \frac{216\cdot 2\sqrt{2}}{3}\sqrt{2} = 288}$ 1