

Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2017 am 15.02.2017

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb MW-E der Eingangsstufe werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 1. Februar 2017 unter <http://www.z-f-m.de> im Bereich Projekte – MW-E.

1. Gegeben ist ein regelmäßiges Achteck (Seitenlänge 2) im Koordinatensystem.

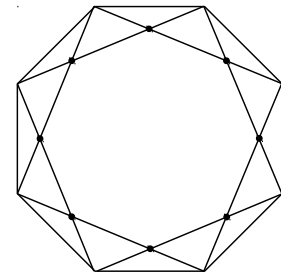
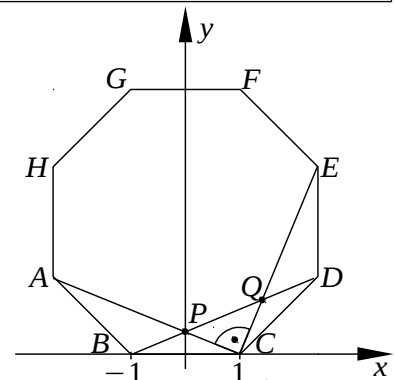
a) Berechnen Sie die Koordinaten von A , D und E .

- b) Die Diagonalen AC , BD und CE schneiden sich in P und Q .

Berechnen Sie die Koordinaten von P und Q .

- c) Zeichnet man im Achteck (Seitenlänge 2) die Diagonalen von jeder Ecke zu den beiden übernächsten Ecken ein, so begrenzen diese Diagonalen ein kleineres Achteck.

Welche Seitenlänge hat dieses kleinere Achteck?



2. a) Bei der Addition von vier gleichen zweistelligen Zahlen steht jeder Buchstabe für eine Ziffer. Verschiedene Buchstaben stehen für verschiedenen Ziffern. Bestimmen Sie H , E und A .

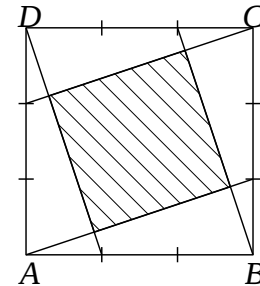
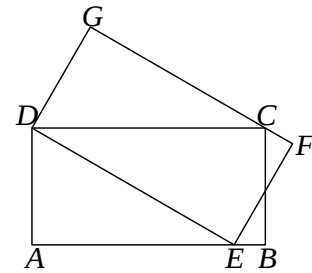
$$\begin{array}{r}
 H E \\
 H E \\
 H E \\
 + H E \\
 \hline
 A H
 \end{array}$$

- b) Für welche natürlichen Zahlen a und b gilt $a^2 = b^2 + 105$?

3. a) Beweisen Sie, dass ein Rechteck mit Umfang 4cm eine Fläche von höchstens 1 cm² hat.

- b) Welches der Rechtecke $ABCD$ und $DEFG$ hat die größere Fläche?

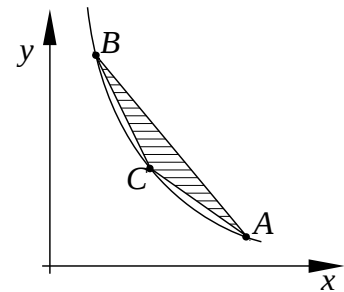
- c) Verbindet man in einem Quadrat die Ecken mit den Drittelpunkten gegenüberliegender Seiten, so erhält man das schraffierte Quadrat. Wie verhält sich die Fläche des schraffierten Quadrates zu der von $ABCD$?



4. Gegeben ist die Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ mit den Punkten $A(a|\frac{1}{a})$ und $B(b|\frac{1}{b})$.

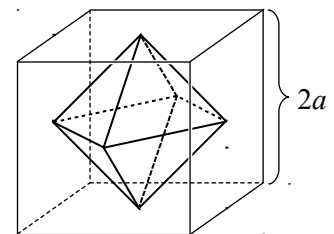
Wie muss $C(c|\frac{1}{c})$ zwischen A und B gewählt werden, damit das Dreieck ABC maximale Fläche hat?

Hinweis: Die Steigung der Tangenten in C ist $-\frac{1}{c^2}$.



5. Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge $2a$. Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen, so erhält man einen Körper, der durch acht gleichseitige Dreiecke begrenzt ist, ein sog. Oktaeder.

Berechnen Sie Kantenlänge, Oberfläche und Volumen des Oktaeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge $2a$ des Würfels.



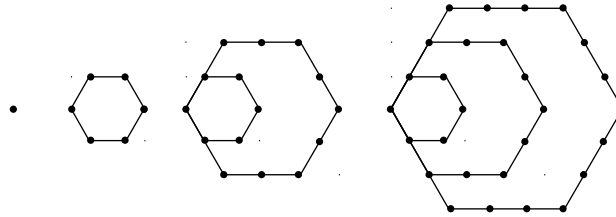
6. Gegeben sind die Parabeln $y = x^2$ und $y = -x^2 + 4x - 4$.

Zeichnen Sie die Parabeln und skizzieren Sie die gemeinsame Tangente, die nicht die x - Achse ist.

Berechnen Sie die gemeinsame Tangente und die Berührungspunkte $P(p|p^2)$ und $Q(q|-q^2+4q-4)$.

Hinweis: Die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ hat im Punkt $(x_0|y_0)$ die Steigung $2ax_0 + b$.

7. a) Die sogenannten Sechseckszahlen lassen sich durch Punkte auf ineinander geschachtelten Sechsecken darstellen.



Die ersten beiden Zahlen sind $S_1 = 1$ und $S_2 = 6$.

- (i) Bestimmen Sie S_3, S_4 und S_5 .
 - (ii) Welche Beziehung besteht zwischen S_{n+1} und S_n ?
 - (iii) Bestimmen Sie S_n in Abhängigkeit von n .
Hinweis: Berechnen Sie $\frac{S_n}{n}$.
- b) Welcher Rest ergibt sich, wenn 3^{2017} durch 7 geteilt wird?

- c) Ein Kind wurde am 1. Mai im Jahr 1 v. Chr. geboren.
Es starb am 1. Mai 1 n. Chr.
Wie alt wurde es?

Die Stadt Augsburg wurde erstmalig im Jahr 15 v. Chr. urkundlich erwähnt.
In welchem Jahr hätte Augsburg sein 2000 jähriges Bestehen feiern können?



8. a) Ein Steinpilz wog 100 g und bestand zu 96% aus Wasser.
Nach einem Regen absorbiert er so viel Wasser, dass er nun zu 98% aus Wasser besteht.
Wie viel wiegt er nun?
- b) Ein Zug, der 180 m lang ist, passiert ein Signal in 90 sec.
Wie lange braucht er, um eine 300 m lange Brücke zu überqueren?
- c) Gibt es natürliche Zahlen x, y und z , so dass $28x + 30y + 31z = 365$ gilt?