

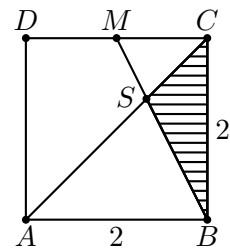
Musteraufgaben zum
 Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2019

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb MW-E der Einführungsphase werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss dabei klar erkennbar sein.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 01. Februar 2019 unter <http://www.z-f-m.de> im Bereich Projekte – MW-E.

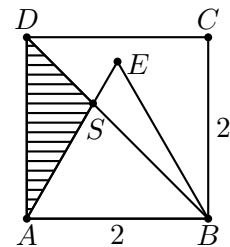
- 1.) a) Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ (Seitenlänge 2), der Mittelpunkt M von CD und der Schnittpunkt S von AC mit BM .

Berechnen Sie die Fläche F des Dreiecks BCS .



- b) Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ (Seitenlänge 2), das gleichseitiges Dreieck ABE und der Schnittpunkt S von AE mit BD .

Berechnen Sie die Fläche F des Dreiecks ASD .



- 2.) a) Berechnen Sie

$$\frac{(10! + 9!)(8! + 7!)(6! + 5!)(4! + 3!)(2! + 1!)}{(10! - 9!)(8! - 7!)(6! - 5!)(4! - 3!)(2! - 1!)}$$

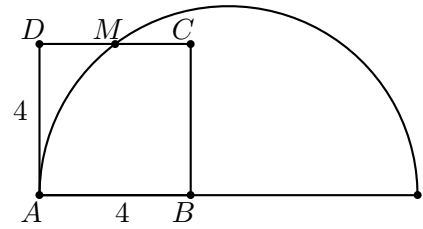
Hinweis: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

- b) Welches ist die kleinste Zahl in der Folge

$$\sqrt{\frac{7}{6}} + \sqrt{\frac{96}{7}}, \sqrt{\frac{8}{6}} + \sqrt{\frac{96}{8}}, \dots, \sqrt{\frac{n}{6}} + \sqrt{\frac{96}{n}}, \dots, \sqrt{\frac{95}{6}} + \sqrt{\frac{96}{95}} ?$$

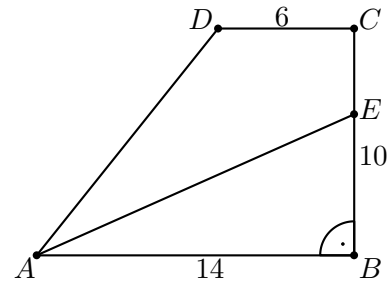
- 3.) a) Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ (Seitenlänge 4), der Mittelpunkt M von CD und ein Halbkreis durch A und M .

Berechnen Sie den Radius r des Halbkreises.



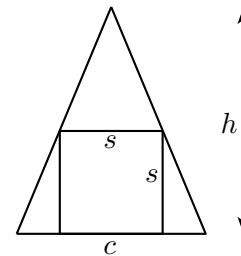
- b) Gegeben ist das abgebildete Trapez $ABCD$.

- (i) Berechnen Sie AD und die Fläche F des Trapezes.
 (ii) Wie muss E auf BC gewählt werden, damit AE die Trapezfläche halbiert?



- 4.) a) Zeigen Sie, dass in einem gleichschenkligen Dreieck mit Basis c und der zugehörigen Höhe h für die Seite s des sog. Basisquadrats gilt:

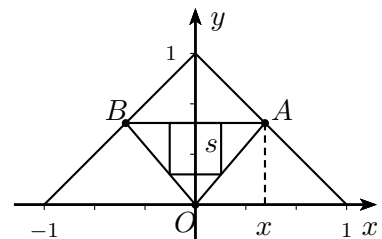
$$s = \frac{c \cdot h}{c + h} .$$



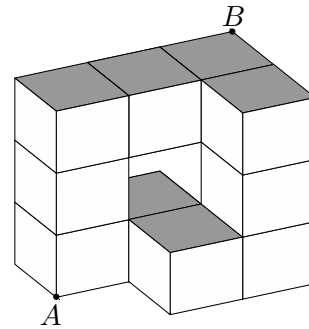
- b) Im x - y -Koordinatensystem sind gleichschenklige Dreiecke ABO gegeben, mit $O(0|0)$, A und B auf den Geraden $y = 1 - x$ bzw. $y = 1 + x$.

- (i) Berechnen Sie die Seite s des Basisquadrates in Abhängigkeit von x .
 (ii) Für welches x ist $s(x)$ maximal?

Hinweis: Es gilt $x - x^2 = -2 + 3(1 + x) - (1 + x)^2$

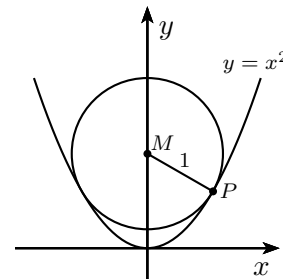


- 5.) Zehn Würfel (Kantenlänge 1) werden zu einem ringförmigen Körper zusammengesetzt.
- Berechnen Sie die Oberfläche dieses Körpers.
 - Der Körper hat Kanten der Länge 1, 2 und 3. Berechnen Sie die Summe der Kantenlängen.
 - Berechnen Sie den Abstand der Ecken A und B .



- 6.) Ein Kreis um $M(0|m)$ mit Radius 1 berührt die Parabel $y = x^2$ in $P(x|x^2)$, $x > 0$.

Berechnen Sie die Koordinaten von M und P .



- 7.) Zwei Zahlen x und y werden zufällig und unabhängig voneinander aus dem Intervall $(0, 2)$ ausgewählt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $x + y < 1$ ist.

- 8.) Anton hat einen Akku-Bohrer, ein Ladegerät und zwei voll aufgeladene Akkus (A_1 und A_2).
Ein voll aufgeladener Akku ist nach 2 Stunden bohren leer.

Um möglichst lange bohren zu können, geht Anton folgendermaßen vor:

Nachdem A_1 leer ist, setzt er A_2 in den Akku-Bohrer und lädt A_1 so lange, bis A_2 leer ist. Zu diesem Zeitpunkt ist A_1 zur Hälfte geladen und wird in den Akku-Bohrer eingesetzt und A_2 wird geladen.

Während Anton mit dem halb geladenen A_1 bohrt, wird A_2 aufgeladen, und zwar so lange bis, A_1 leer ist.

Diese Prozedur wird so lange wiederholt, bis beide Akkus leer sind.

Wie viele Stunden kann Anton mit dem Bohrer arbeiten, wenn das Entladen eines Akkus zwei Mal so schnell erfolgt wie das Aufladen des Akkus?

Hinweis: $1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$ für $|q| < 1$