Lösungen zu den Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2019 am 20.02.2019

1. a) 1. Lösung
Im Koordinatensystem mit $A(0|0)$ liegen AC und BM auf den Geraden $y = x$ bzw. $y = -2x + 4$. Sie schneiden sich in $S\left(\frac{4}{3}|\frac{4}{3}\right)$.
Somit ist $F = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 - \frac{4}{3}) = \frac{2}{3}$.

2. Lösung
Die Dreiecke ABS und CMS sind ähnlich.
Die zu S gehörenden Höhen verhalten sich wie $2 : 1$ bzw. $\frac{4}{3} : \frac{2}{3}$.
Also ist im Dreieck BCS die Höhe $\frac{2}{3}$ und somit $F = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.

b) Im Koordinatensystem mit $A(0|0)$ liegen AE und BD auf den Geraden $y = \sqrt{3}x$ bzw. $y = -x + 2$. Sie schneiden sich in $S\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}|\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$.
Also ist $F = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1$

---

2. a) Mit $\frac{(n+1)!+n!}{(n+1)!-n!} = \frac{n!(n+1+1)}{n!(n+1-1)} = \frac{n+2}{n}$ folgt

$$\frac{(10!+9!)\cdot(8!+7!)\cdot(6!+5!)\cdot(4!+3!)\cdot(2!+1!)}{(10!+9!)\cdot(8!-7!)\cdot(6!-5!)\cdot(4!-3!)\cdot(2!-1!)} =$$

$$\frac{(10+1)9!\cdot(8+1)7!\cdot(6+1)5!\cdot\;\cdots\;\cdot(2+1)1!}{(10-1)9!\cdot(8-1)7!\cdot(6-1)5!\cdot\;\cdots\;\cdot(2-1)1!} =$$

$$\frac{11}{9}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{1} = 11$$

b) Mit $f(n) := \sqrt{\frac{n}{6}} + \sqrt{\frac{96}{n}}$ ist auch $f^2(n) = \frac{n}{6} + \frac{96}{n} + 8$ minimal.

1. Lösung:
Aus $\left(f^2(n)\right)' = \frac{1}{6} - \frac{96}{n^2} = 0$ folgt $n = 24$.

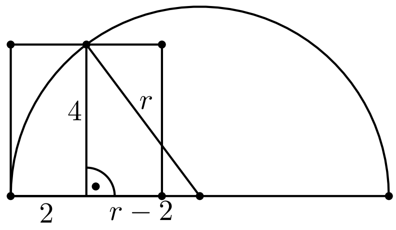
2. Lösung:
$f^2(n) = \left(\sqrt{\frac{n}{6}} - \sqrt{\frac{96}{n}}\right)^2 + 16$ ist minimal für $\sqrt{\frac{n}{6}} = \sqrt{\frac{96}{n}}$, also für $n = 24$.

3. Lösung:
Mit der Ungleichung $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel und der Gleichheit für $a = b$ folgt aus

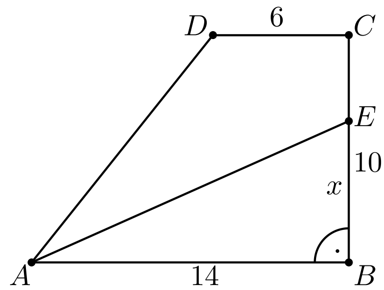
$$\sqrt{\frac{n}{6}} + \sqrt{\frac{96}{n}} \leq 2\sqrt{\sqrt{\frac{n}{6}}\cdot\sqrt{\frac{96}{n}}} = 4$$

$\sqrt{\frac{n}{6}} = \sqrt{\frac{96}{n}}$, also $n = 24$.

3. a)



Aus $4^2 + (r-2)^2 = r^2$ folgt $r = 5$.

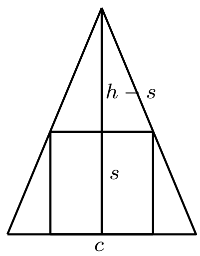


b) (i) $AD = \sqrt{(14-6)^2 + 10^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$
$F = \frac{1}{2}(14+6) \cdot 10 = 100$

(ii) Aus $\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 100$ folgt $x = \frac{100}{14} = \frac{50}{7}$

---

4. a)



Aus $\dfrac{h-s}{s} = \dfrac{h}{c}$ folgt $s = \dfrac{c \cdot h}{c+h}$.

b) Mit $A(x|y)$ und $y = 1 - x$ folgt $s = \dfrac{2x \cdot y}{2x + y} = 2\dfrac{x - x^2}{1+x}$

1. Lösung: (ohne Differenzialrechnung)

$$s(x) = 2\frac{x-x^2}{1+x} = 2\frac{-2+3(1+x)-(1+x)^2}{1+x} = 2\left(3 - \left(\frac{2}{1+x} + \frac{1+x}{1}\right)\right)$$

$$= 2 \cdot \left(3 + 2\sqrt{2} - \left(\sqrt{\tfrac{2}{1+x}} - \sqrt{1+x}\right)^2\right).$$

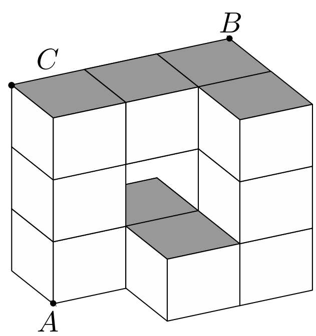
$s(x)$ ist maximal für $\sqrt{\frac{2}{1+x}} = \sqrt{1+x}$, also $x = \sqrt{2} - 1$

2. Lösung:

Aus $s'(x) = 2\dfrac{(1-2x)(1+x)-(x-x^2)}{(1+x)^2} = 0$ folgt $x^2 + 2x - 1 = 0$, also $x = \sqrt{2} - 1$.

---

5. a) Jeder der 10 Würfel berührt mit jeweils 2 Seiten seine Nachbarwürfel, also ist die Oberfläche $10 \cdot (6-2) = 40$.



b) Die Länge der sichtbaren Kanten ist 37 (eine Kante ist nur teilweise zu sehen); die Länge der verdeckten Kanten ist 17; somit beträgt die Summe 54.

c) $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 10} = \sqrt{19}$

6. Gesucht ist der Parabelpunkt $P\left(x|x^2\right)$, für den PM maximal ist.

1. Lösung:

$PM^2 = x^2 + (x^2 - m)^2 = \left(x^2 - \left(m - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + m - \frac{1}{4}$ ist maximal für $x^2 = m - \frac{1}{2}$.
Wegen $PM = 1$ folgt $m - \frac{1}{4} = 1$, also $m = \frac{5}{4}$ und $x^2 = \frac{3}{4}$

Also ist $M\left(0|\frac{5}{4}\right)$ und $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\frac{3}{4}\right)$.

2. Lösung:

PM steht senkrecht auf der Tangente in P:
Aus $2x \cdot \frac{m-x^2}{x} = -1$ folgt $x^2 = m - \frac{1}{2}$
Aus $1^2 = x^2 + (m-x)^2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ folgt $m = \frac{5}{4}$ und $x^2 = \frac{3}{4}$.
Also ist $M\left(0|\frac{5}{4}\right)$ und $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\frac{3}{4}\right)$

3. Lösung:

$d := PM$ ist minimal, wenn $d^2 = x^2 + \left(x^2 - m\right)^2$ minimal ist.
Aus $\left(d^2\right)' = 2x + 2\left(x^2 - m\right) \cdot 2x = 0$ folgt $x^2 = m - \frac{1}{2}$.

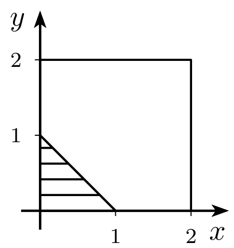
Wegen $PM = 1$ folgt $m - \frac{1}{4} = 1$, also $m = \frac{5}{4}$ und $x^2 = \frac{3}{4}$

Also ist $M\left(0|\frac{5}{4}\right)$ und $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\frac{3}{4}\right)$

---

7. Im x-y-Koordinatensystem gilt im schraffierten Gebiet $x + y < 1$.

Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit das Verhältnis der Flächeninhalte des schraffierten Gebietes zu der ganzen Fläche des Quadrates: $\frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$.



---

8. Sei t die Gesamtzeit, die bei dem beschriebenen Wechsel erreicht wird.
Dann gilt:

1. Lösung:

$$t = 2 + 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \cdots = 4 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 4 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 6 \text{ (Stunden).}$$

2. Lösung:

Aus $t = 2 + 2 + \frac{1}{2}(t-2)$ folgt $t = 6$ (Stunden).