MW-E
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. Gegeben ist das Dreieck ABO mit $A(6|0)$, $B(0|8)$ und $O(0|0)$.
Gesucht ist ein Punkt $P(a|b)$ innerhalb des Dreiecks, so dass die Dreiecke OAP, ABP und OPB die gleiche Fläche haben.

   a) Zeichnen Sie das Dreieck im Koordinatensystem und bestimmen Sie die Koordinaten von P.

   b) Beweisen oder widerlegen Sie: P ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden im Dreieck ABO.

---

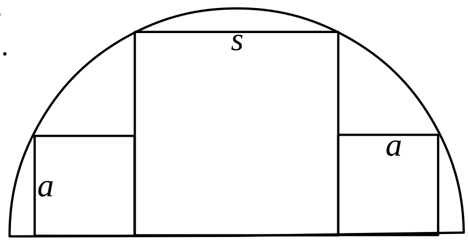
2. Wenn die Zehnerziffer einer 3-stelligen Zahl abc gestrichen wird, entsteht die 2-stellige Zahl ac.

   Für welche Zahlen abc gilt $abc = 9 \cdot ac + 4 \cdot c$?
   Beispiel: $245 = 9 \cdot 25 + 4 \cdot 5$.

---

3. Zwei kleine Quadrate mit Seitenlänge a und ein größeres Quadrat sind einem Halbkreis einbeschrieben (vgl. Abb.) .

   Berechnen Sie die Seite s des größeren Quadrates in Abhängigkeit von a.

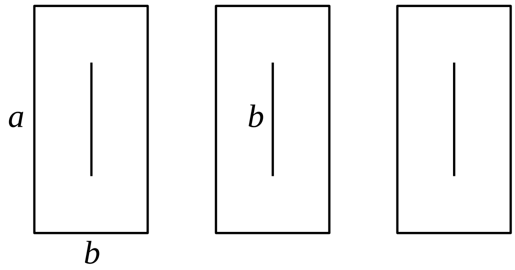


---

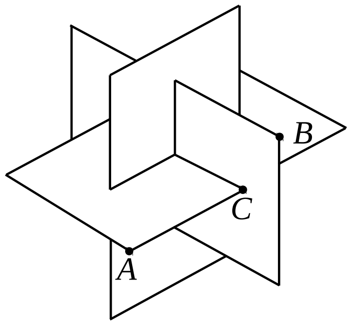
4. Ein Schiff verkehrt zwischen zwei Häfen, die 100 km voneinander entfernt sind.
Die Kosten für den Treibstoff sind proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit des Schiffes.
Bei $20\frac{km}{h}$ sind dies 400 € pro Stunde.
Die sonstigen Betriebskosten betragen 64 € pro Stunde.

   Bei welcher Geschwindigkeit v sind die Gesamtkosten $g(v)$ am geringsten?

5. Gegeben sind drei Rechtecke mit den Seiten a und b $(a>b)$, die so ineinander gesteckt werden, dass sie paarweise senkrecht aufeinander stehen (vgl. Abb.).

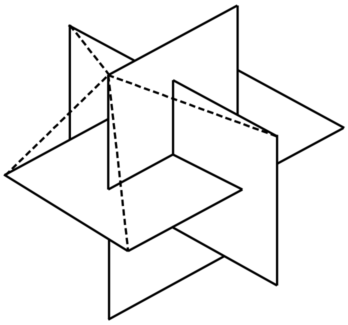


a) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a und b die Abstände von B und C sowie von A und B.



b) Sei die kürzere Rechteckseite $b=1$. Wie muss a gewählt werden, damit AB auch 1 ist?

c) Wie viele Verbindungsstrecken erhält man, wenn jede Ecke des Rechtecks mit den nächstgelegenen Ecken verbunden wird (vgl. Abb.)?



6. Gegeben ist die Parabel $y=x^2-3x+2$ und der Punkt $P(3|-2)$.

a) Zeichnen Sie die Parabel und skizzieren Sie die beiden Tangenten von P an die Parabel.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Berührpunkte.
Hinweis: Die Parabel $y=ax^2+bx+c$ hat im Punkt $(x_0|y_0)$ die Steigung $2ax_0+b$.

7. Gegeben ist die Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$

   a) Setzen Sie die Folge fort, indem Sie die nächsten acht Folgenglieder berechnen.

   b) Zeigen Sie, dass jede 5. Zahl in der Folge durch 5 teilbar ist.

   c) Teilen Sie jedes Folgenglied durch 3 und bilden Sie die Folge der Reste,
   also $1, 1, 2, 0, 2, \cdots$
   Setzen Sie diese Folge fort, bis sie periodisch wird.
   Wie lang ist die Periode?

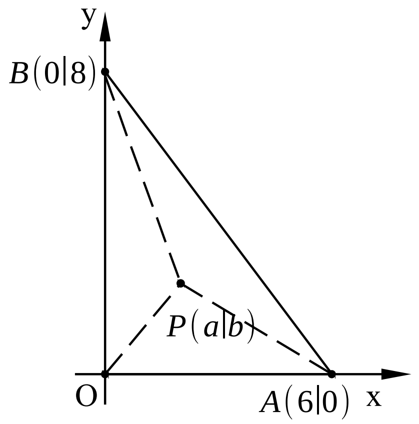
---

8. a) Gesucht ist eine 2-stellige Zahl a und eine 3-stellige Zahl b, für die folgendes gilt:
   a um $b\%$ vergrößert ist gleich b um $a\%$ verringert.

   b) Familie Katzenmeier besteht aus Mutter, Vater und mehreren Kindern.
   Das Durchschnittsalter aller Familienmitglieder ist 15.
   Der Vater ist 43 Jahre alt.
   Das mittlere Alter von Mutter und Kindern ist 11.

   Wie viele Kinder sind in der Familie?

Lösungen zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2016



1\. a) Das Dreieck ABO ist rechtwinklig und hat die Fläche $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24$.
Daher müssen die Teildreiecke die Fläche $\frac{24}{3} = 8$ haben.
Also gilt $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot b = 8$ und $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot a = 8$,
und somit $a = 2$ und $b = \frac{8}{3}$. 6P.

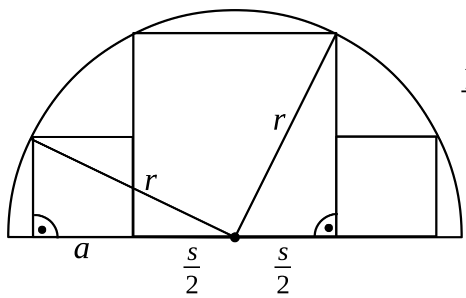
b) Die Seitenhalbierende durch $O(0|0)$ und den Mittelpunkt $(3|4)$ von AB hat die Gleichung $y = \frac{4}{3}x$.
Die Seitenhalbierende durch $B(0|8)$ und den Mittelpunkt $(3|0)$ von AO hat die Gleichung $y = -\frac{8}{3}x+8$.
Für den Schnittpunkt gilt $\frac{4}{3}x = -\frac{8}{3}x+8$, also $x = 2$ und $y = \frac{8}{3}$. 6P.
Es gilt für jedes Dreieck: Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden zerlegt das Dreieck in drei flächengleiche Teildreiecke.

2\. Aus $abc = 9\cdot ac + 4\cdot c$ folgt $100a+10b+c = 9\cdot(10a+c)+4\cdot c$, also $5(a+b) = 6c$.
Mit $c = 5$ folgt $a+b = 6$.

a	b	abc
1	5	155
2	4	245
3	3	335
4	2	425
5	1	515
6	0	605

Es gibt 6 dreistellige Zahlen. 12P.

3\. Sei r der Radius des Halbkreises.
Dann gilt $r^2 = s^2+\left(\frac{s}{2}\right)^2 = a^2+\left(a+\frac{s}{2}\right)^2$
Hieraus folgt $0 = s^2-as-2a^2 = (s-2a)(s+a)$,
also $s = 2a$. 12P.



4. Die Treibstoffkosten pro Stunde betragen $k \cdot v^2$, wobei für den Proportionalitätsfaktor k gilt $400 = k \cdot 20^2$, also $k = 1$.
Die Fahrtzeit ist $\frac{100}{v}$.
Also sind die Gesamtkosten $g(v) = v^2 \cdot \frac{100}{v} + 64 \cdot \frac{100}{v} = 100\left(v + \frac{64}{v}\right)$.

<u>1. Lösung:</u>
Aus $g(v) = 100\left(v + \frac{64}{v}\right) = 100\left(\sqrt{v} - \frac{8}{\sqrt{v}}\right)^2 + 100 \cdot 16$ 12P.
folgt $v = 8\,\frac{km}{h}$, damit $g(v)$ minimal wird.

<u>2. Lösung:</u>
Aus $g'(v) = 100\left(1 - \frac{64}{v^2}\right) = 0$ folgt $v = 8\,\frac{km}{h}$.
Wegen $g''(v) = 100 \cdot \frac{128}{v^3} > 0$ liegt ein Minimum vor.

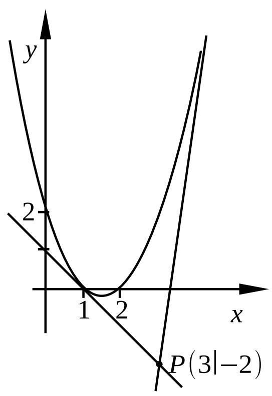
---

5. a) $BC^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 - 2ab + 2b^2\right)$. 4P.
$AB^2 = AC^2 + BC^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(a^2 - 2ab + 2b^2\right) = \frac{1}{2}\left(a^2 - ab + b^2\right)$

b) Mit $b = 1$ folgt $1 = \frac{1}{2}\left(a^2 - a + 1\right)$, also $a^2 - a - 1 = 0$ und somit $a = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$. 4P.

c) Von jeder der 12 Ecken gehen 4 Verbindungsstrecken aus. 4P.
Jede dieser Strecken wird doppelt gezählt, also gibt es $12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 24$ Strecken.

6. a) Aus $y = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ folgen 6P.
die Nullstellen $(1|0)$ und $(2|0)$, sowie der Scheitel $\left(\frac{3}{2}\middle|-\frac{1}{4}\right)$.



b) Für die Tangente im Parabelpunkt $Q(x|y)$ gilt
$2x - 3 = \frac{y+2}{x-3}$ und somit $(2x-3)(x-3) = x^2 - 3x + 2 + 2$. 6P.
Hieraus folgt $0 = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$.
Also sind die Berührpunkte $(1|0)$ und $(5|12)$.

7. a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 4P.

b) Seien a und b zwei aufeinander folgende Glieder.
Dann sind
a, b, $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$, $3a+5b$ sechs aufeinander folgende Folgenglieder. 4P.

Ist a durch 5 teilbar, dann auch $3a+5b$.

c) 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1 Periode 8 4P.

---

8. a) Aus $a\left(1+\frac{b}{100}\right)=b\left(1-\frac{a}{100}\right)$ folgt $b=\frac{50a}{50-a}$.
Also kann $(a;\ b)$ zum Beispiel $(40;\ 200)$, $(45;\ 450)$ oder $(46;\ 575)$ sein. 6P.

b) Sei n die Anzahl der Kinder und s die Summe aller Alter in der Familie.
Dann gilt $15=\frac{s}{n+2}$ und $11=\frac{s-43}{n+1}$. 6P.

Hieraus folgt $s=15(n+2)=11(n+1)+43$ und somit $n=6$.
D. h. die Familie hat 6 Kinder.