MW-E
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

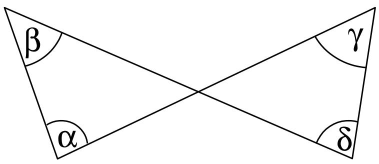
1. In einem Quadrat $ABCD$ sind die gegenüberliegenden Ecken im Koordinatensystem $A(-4|-3)$ und $C(4|3)$.
   Bestimmen Sie bei diesem Quadrat
   a) die Seitenlänge s.
   b) den Umkreisradius R und den Inkreisradius r.
   c) die Koordinaten von B und D.

---

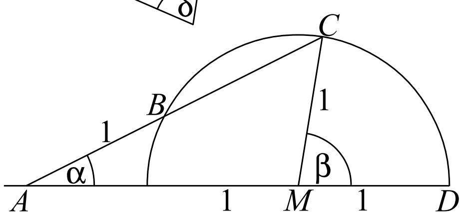
2. Wählen Sie zwei ungerade aufeinanderfolgende Zahlen, zum Beispiel 3 und 5.
   Addieren Sie die Kehrwerte: $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$.
   8 und 15 sind die Katheten eines Pythagoräischen Dreiecks, d.h. eines rechtwinkligen Dreiecks mit ganzzahligen Seiten, denn es gilt $8^2+15^2=17^2$.
   a) Gilt dies auch für andere ungerade, aufeinanderfolgende Zahlen?
   Überprüfen Sie diese Behauptung an drei weiteren Beispielen.
   b) Beweisen Sie diese Behauptung.

---

3. a) Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln α, β, γ und δ?

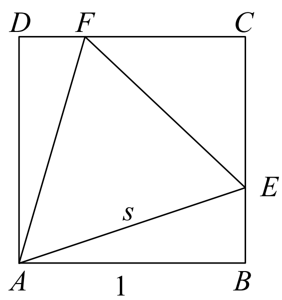


   b) In der Abbildung ist AD eine Strecke durch den Mittelpunkt M eines Kreises mit Radius 1.
   Bei der Strecke AC durch B ist $AB = 1$.
   Welche Beziehung besteht zwischen $\alpha = \sphericalangle MAC$ und $\beta = \sphericalangle DMC$?



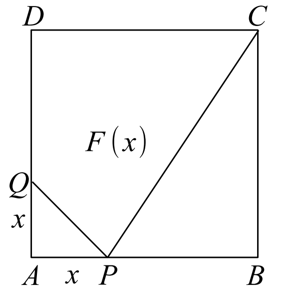
   c) Im Einheitsquadrat $ABCD$ sind E auf BC und F auf CD so gewählt, dass das Dreieck AEF gleichseitig ist.

   Berechnen Sie die Seitenlänge s des Dreiecks.

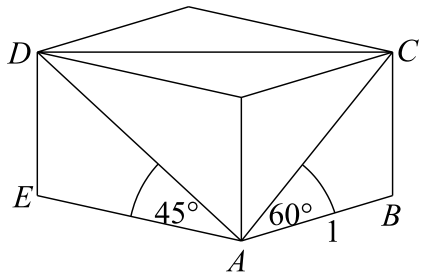


4. Sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 1.
Die Punkte P auf AB und Q auf AD sind so gewählt, dass $AP = AQ$.

Wie muss $x := AP$ gewählt werden, damit die Fläche $F(x)$ des Vierecks $PCDQ$ maximal wird?



5. In dem abgebildeten Quader ist $AB=1$, $\sphericalangle BAC = 60°$ und $\sphericalangle DAE = 45°$.



a) Berechnen Sie BC und AE.

b) Wie lang sind die Seiten des Dreiecks ACD?

c) Wie groß ist der Winkel von $\sphericalangle CAD$?

6. a) Es sei $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ rational} \\ 1, & x \text{ irrational} \end{cases}$

Berechnen Sie $2 \cdot f(\sqrt{2}) - 3 \cdot f(f(\sqrt{2}))$.

b) Der Mittelpunkt des Kreises $x^2 + y^2 = 25$ wird im Koordinatensystem nach $(3|4)$ verschoben.

Welche Gleichung hat der verschobene Kreis?

c) In einem Dreieck mit den Winkeln α, β und γ gilt $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ und $\cos(\beta) = 0$.

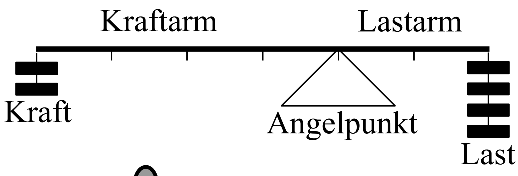
Berechnen Sie $\sin(\gamma)$.

7. a) Bei wie vielen dreistelligen Zahlen sind alle drei Ziffern ungerade?

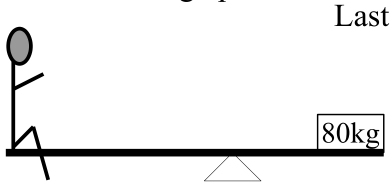
b) Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, bei denen keine zwei Ziffern gleich sind, d. h. alle drei Ziffern verschieden sind?

c) Drei Spielwürfel werden gleichzeitig geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 6 ist?

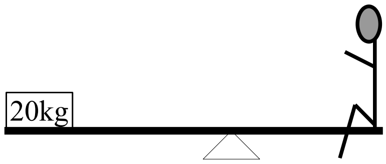
8. Das Hebelgesetz besagt:
Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm.



a) Die erste Abbildung zeigt Hans auf einer Wippe mit 80 kg im Gleichgewicht.



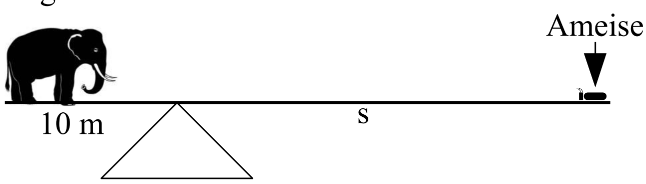
Setzt er sich auf die andere Seite, so ist er mit 20 kg im Gleichgewicht.



Wie schwer ist Hans?

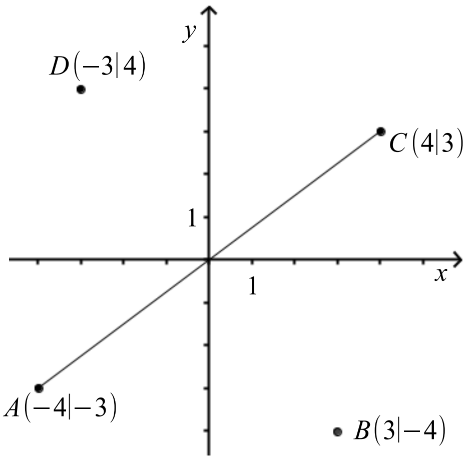
b) Ein Elefant wiegt 5000 kg, eine Ameise 10 mg.

Wie lang muss der Lastarm s sein, damit die Wippe im Gleichgewicht ist? (Die Wippe soll kein Gewicht haben.)



Lösungen zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2014

1. Die Länge der Diagonalen AC
$d := \sqrt{(-4-4)^2+(-3-3)^2} = \sqrt{64+36} = 10$.



a) $s = \frac{d}{\sqrt{2}} = 5\cdot\sqrt{2}$. 4P.

b) $R = \frac{d}{2} = 5,\ r = \frac{s}{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$. 4P.

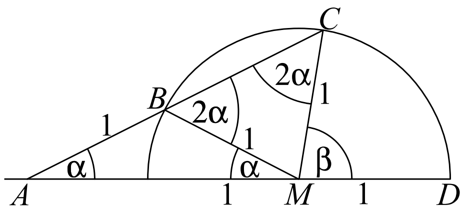
c) Dreht man AC um 90° im Gegenuhrzeigersinn um $(0|0)$, so erhält man BD.
Bei dieser Drehung wird $(a|b)$ auf $(-b|a)$ abgebildet.
Also ist $B(3|-4)$ und $D(-3|4)$. 4P.

2. a) $\frac{1}{1}+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $3^2+4^2 = 5^2$.
$\frac{1}{5}+\frac{1}{7} = \frac{12}{35}$, $12^2+35^2 = 37^2$. 6P.
$\frac{1}{7}+\frac{1}{9} = \frac{16}{63}$, $16^2+63^2 = 65^2$.

b) $\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1} = \frac{4n}{4n^2-1}$ 6P.
In den Beispielen ist die Hypotenuse um 2 größer als eine der Katheten.
Wie man leicht nachrechnet, gilt: $(4n)^2+(4n^2-1)^2 = (4n^2+1)^2$.

3. a) $\alpha+\beta = \gamma+\delta$ 4P.

b) Die Dreiecke AMB und BMC sind gleichschenklig. Der Winkel β ist Außenwinkel im Dreieck AMC, also gilt $\beta = 3\alpha$. 4P.

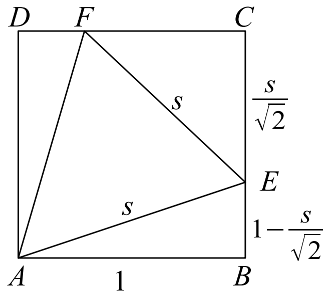


c) 1. Lösung:

Aus $s^2 = 1^2+\left(1-\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2$ folgt

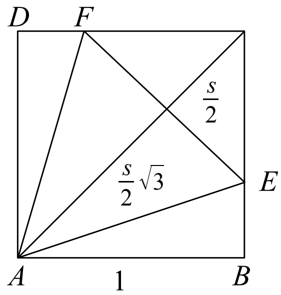
$s^2+2s\sqrt{2} = 4$ und $\left(s+\sqrt{2}\right)^2 = 6$,

also $s = \sqrt{6}-\sqrt{2}$.



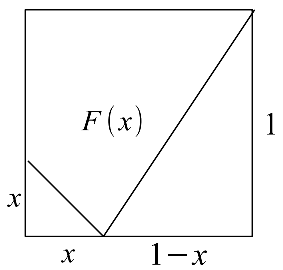
2. Lösung:

Aus $\frac{s}{2}+\frac{s}{2}\sqrt{3} = \sqrt{2}$ folgt $s = \sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$. 4P.



Hinweis: Ein weiterer Lösungsweg ergibt die äquivalente Lösung $s = 2\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

4. $F(x) = 1-\frac{x^2}{2}-\frac{(1-x)\cdot 1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}$



1. Lösung:

$F(x) = \frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2} = \frac{5}{8}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

$F(x)$ ist maximal für $x = \frac{1}{2}$. 12P.

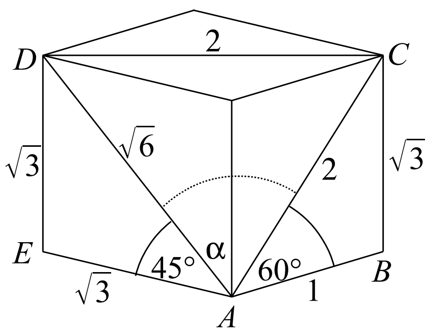
2 Lösung:

Aus $F'(x) = \frac{1}{2}-x = 0$ folgt $x = \frac{1}{2}$. Wegen $F''(x) = -1$ liegt ein Maximum vor.

5. a) Es gilt $AE = DE = BC = \sqrt{3}$. 4P.

b) $AC = 2$, $AD = \sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{6}$ 4P.

$CD = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$.



c) Das Dreieck ACD ist gleichschenklig und 4P.

somit $\cos\alpha = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

6. a) Wegen $f\left(\sqrt{2}\right)=1$ folgt
$2\,f\left(\sqrt{2}\right)-3\,f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right) = 2\cdot 1-3\,f\left(1\right) = 2-3\cdot 0 = 2$. **4P.**

b) $\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2 = 25$ bzw. $x^2-6x+y^2-8y = 0$. **4P.**

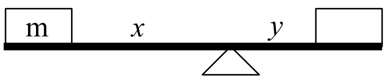
c) Aus $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ folgt $\alpha = 30°$. Aus $\cos\beta = 0$ folgt $\beta = 90°$.
Also ist $\gamma = 60°$ und $\sin\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **4P.**

7. a) Es gibt fünf ungerade Ziffern (1, 3, 5, 7 und 9).
Also gibt es $5\cdot 5\cdot 5 = 125$ dreistellige Zahlen, bei denen alle Ziffern ungerade sind. **4P.**

b) Es gibt $9\cdot 9\cdot 8 = 648$ solcher Zahlen. **4P.**

c) Es gibt $6^3 = 216$ mögliche Ausfälle.
Die Augensumme 6 kann man mit $1+1+4$ auf 3 Arten, mit $1+2+3$ auf 6 Arten und mit $2+2+2$ auf eine Art erhalten. **4P.**
Also ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{10}{216}$.

8. a) Seien x und y die beiden Arme der Wippe.
Das Gewicht von Hans sei m.
Dann gilt $m\cdot x = 80\cdot y$
und $20\cdot x = m\cdot y$.



Hieraus folgt $\frac{m}{20} = \frac{80}{m}$, also $m = 40\ (kg)$. **6P.**

b) Aus $5000\ kg\cdot 10\ m = 10\,mg\cdot s$
folgt $s = \frac{5000\cdot 10^3\cdot 10\,m}{10\cdot 10^{-3}} = 5\cdot 10^9\,m = 5.000.000\ km.$ **6P.**