Lösungen zu den Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2020 am 19.02.2020

1. Aus $x+1 = m\,x - 1$ folgt $x = \frac{2}{m-1}$.

   Aus $x+1 = -2\,x + 2\,m$ folgt $x = \frac{2\,m-1}{3}$.

   Aus $\frac{2}{m-1} = \frac{2\,m-1}{3}$ folgt $0 = 2\,m^2 - 3\,m - 5 = (m+1)(2\,m-5)$ und somit $m = \dfrac{3 \pm 7}{4}$.

   Für $m = -1$ folgt $S(-1|0)$.

   Für $m = \frac{5}{2}$ folgt $S(\frac{4}{3}|\frac{7}{3})$.

---

2. i) $0 = x^2 - 13x + 42 = (x-6)(x-7)$

   ii) Aus $x^2 - 7x + 11 = 1$ folgt $0 = x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$

   iii) Aus $x^2 - 7x + 11 = -1$ folgt $0 = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$.
   Sowohl für $x = 3$ als auch für $x = 4$ ist $x^2 - 13x + 42$ gerade.

   Somit gilt die Gleichung für $x = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

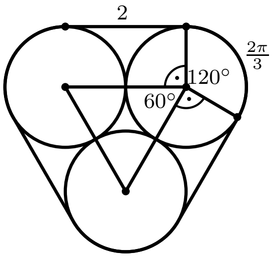
---

3. Mit $a^2 + b^2 = 27$ gilt $V = \frac{1}{3}\pi \cdot b^2 \cdot a = \frac{\pi}{3}\left(27a - a^3\right)$

   i) Ohne Differenzialrechnung
   $V = \frac{\pi}{3}\left(27a - a^3\right) = \frac{\pi}{3}(54 - (a-3)^2(a+6))$ ist maximal für $a = 3$ und somit $b = 3\sqrt{2}$.

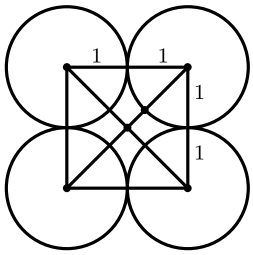
   ii) Aus $V' = \frac{\pi}{3}\left(27 - 3a^2\right) = 0$ folgt $a = 3$ und $b = 3\sqrt{2}$.
   Wegen $V'' = \frac{\pi}{3} \cdot (-6a) < 0$ ist $a = 3$ ein Maximum.

4. a)



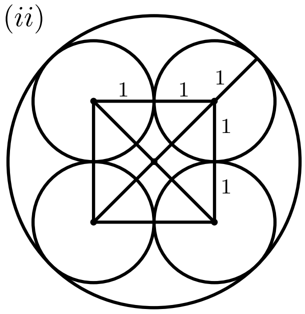
$$3\left(2+\frac{2\pi}{3}\right)=6+2\pi$$

b) (*i*)



$$r=\tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-1$$

(*ii*)



$$R=\tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}+1=\sqrt{2}+1$$

---

5. a) Anzahl an Ecken: $\frac{1}{3}(6\cdot 20+5\cdot 12)=60$

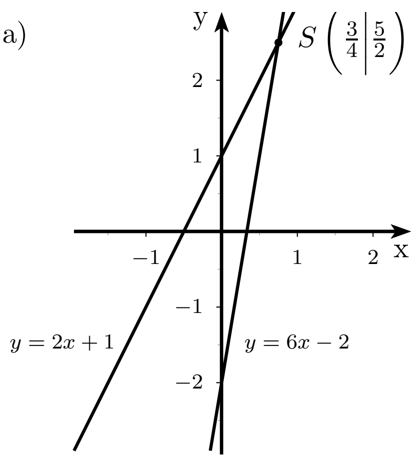
   Anzahl der Kanten: $\frac{1}{2}(6\cdot 20+5\cdot 12)=90$

b) Von jeder Ecke gehen $59-3$ Diagonalen aus, also gibt es insgesamt $\frac{1}{2}\cdot 60(59-3)=1680$ Diagonalen.

c) Ein 6-Eck hat 9 Diagonalen, ein 5-Eck hat 5 Diagonalen.
Also hat der Fußball $9\cdot 20+5\cdot 12=240$ Flächendiagonalen und somit $1680-240=1440$ Raumdiagonalen.

---

6. a)



b) $F=\frac{1}{2}(1+2)\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{8}$

c) Aus $y=k\,(2x+1)+(1-k)(6x-2)$
folgt $y=m\,x+b$
mit $m=6-4k$ und $b=3k-2$.

7. a) $a_n:\ 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, \cdots$

b) $b_n:\ 1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots$
Aus $b_n = a_n + a_{n+1} = 2^n$ folgt $a_{n+1} = 2^n - a_n$

c) $c_n:\ 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots$
Aus $c_n = a_{n+1} - 2a_n = (-1)^n$ folgt $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$

d) $d_n:\ 0, 1, 1, 0, 2, 2, 0, 1, 1, 0, 2, 2, \cdots$
d_n ist periodisch mit Periodenlänge 6. Wegen $2020 = 336 \cdot 6 + 4$ ist $d_{2020} = d_4 = 2$

e) $e_n:\ 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \cdots$
Es ist $e_n = a_n$.

---

8. a) Ist v die Geschwindigkeit von Uwe, dann läuft Claus mit der Geschwindigkeit $k \cdot v,\ k > 1$.
Da die Laufzeiten gleich sind, gilt $\frac{s}{k \cdot v} = \frac{s - m}{v}$.
Also $s = \frac{k \cdot m}{k - 1}$.

b) Max erreicht den Ball nach $\frac{30}{8 + 4} = 2,5\ [s]$.
Moritz nach $\frac{15}{9 - 4} = 3\ [s]$, d. h. Max ist $0,5\ s$ vor Moritz beim Ball.
Nach $2,5\ s$ ist der Ball $10\ m$ weit gerollt und Moritz $22,5\ m$ weit gelaufen.

Daher sind Max und Moritz $(15 + 20) - 22,5 = 2,5\ [m]$ voneinander entfernt.