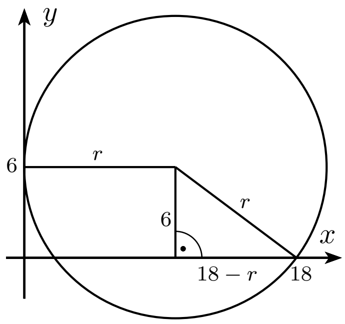
Lösungen zu den Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase am 17. Februar 2021

1. Aus $r^2 = 6^2 + (18 - r)^2$

   folgt $r = \dfrac{6^2 + 18^2}{2 \cdot 18} = 10.$



---

2. a) Aus $3^x = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt[4]{9}}{27} = \dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{4}}}{3^3} = 3^{-2}$ folgt $x = -2$

   b) Aus $3^{2y} + 9 = 10 \cdot 3^y$

   folgt $(3^y)^2 - 10 \cdot 3^y + 9 = 0$

   und somit $3^y = \frac{1}{2} \cdot \left(10 \pm \sqrt{100 - 36}\right) = 5 \pm 4.$

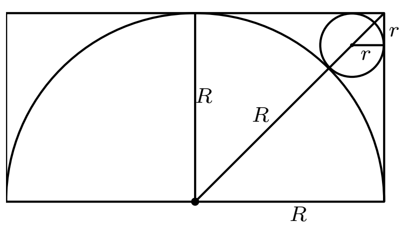
   Aus $3^y = 9$ folgt $y = 2$ und aus $3^y = 1$ folgt $y = 0$.

---

3. a) Aus $R\sqrt{2} = R + r + r\sqrt{2}$

   folgt $R(\sqrt{2} - 1) = r(\sqrt{2} + 1)$

   und $\dfrac{R}{r} = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 3 + 2\sqrt{2}.$

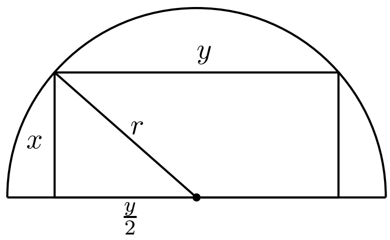


   b) Die Höhe des Dreiecks ist $\frac{s}{2}\sqrt{3}$.

   Der Umkreismittelpunkt (Schwerpunkt) teilt die Höhe im Verhältnis 2 : 1.

   Also ist $R = \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2}\sqrt{3}$ und somit $s = R \cdot \sqrt{3}$.

4. a) Aus $r^2 = x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$ folgt $y^2 = 4\,(r^2 - x^2)$ und somit
$F = x \cdot y = x \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{r^2x^2 - x^4}$.



(i) $F(x) = 2\sqrt{r^2x^2 - x^4} = 2\sqrt{\frac{r^2}{4} - \left(x^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2}$
ist maximal für $x^2 = \frac{r^2}{2}$ und somit für
$x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ und $y = r\sqrt{2} = 2x$.

(ii) Mit $F(x)$ wird auch $F^2(x)$ maximal.
Aus $\frac{d}{dx}F^2(x) = 4\,(2r^2x - 4x^3) = 0$ folgt $4x^2 = 2r^2$ und somit $x = \frac{r}{\sqrt{2}}$ und $y = r\sqrt{2} = 2x$.
Da $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}F^2(x) = 8r^2 - 48x^2 < 0$ für $x^2 = \frac{r^2}{2}$ liegt ein Maximum vor.

---

5. a) Ecken: $8 \cdot 3 = 24$
Kanten: $12 + 8 \cdot 3 = 36$
Flächen: $6 + 8 = 14$

b) Aus $x\sqrt{2} = 1 - 2x$ folgt $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

---

6. a) Für $x = 43$ und $x = 47$ erhält man
$f(43) + 2f(47) = 3 \cdot 43$ und
$f(47) + 2f(43) = 3 \cdot 47$.

Hieraus folgt $f(43) + 2 \cdot (3 \cdot 47 - 2 \cdot f(43)) = 3 \cdot 43$
und somit $f(43) = 51$.
Entsprechend folgt $f(47) = 39$.

b)
$$\begin{aligned} g(2021) &= g(2020) + 1 &&= g(2019) + 2 &&= g(673) + 2 \\ &= g(672) + 3 &&= g(224) + 3 &&= g(223) + 4 \\ &= g(222) + 5 &&= g(74) + 5 &&= g(73) + 6 \\ &= g(72) + 7 &&= g(24) + 7 &&= g(8) + 7 \\ &= g(7) + 8 &&= g(6) + 9 &&= g(2) + 9 \\ &= g(1) + 10 &&= 11. \end{aligned}$$

7. a) Aus $(n+1)! - n! = n! \cdot n$ und
$4320 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3)$ folgt $n = 6$.

b) Aus der Tabelle folgt für die Wahrscheinlichkeit
$\frac{2+2+2+1}{6 \cdot 6} = \frac{7}{36} \approx 19\%$

Augensumme	$1+4$	$2+3$	$4+6$	$5+5$
Häufigkeiten	2	2	2	1

---

8. Aus der Tabelle folgt, dass 16 Pferde in 15 Tagen 480 kg Hafer fressen.

Pferde	Tage	Hafer
4	5	40
16	5	$160 = 40 \cdot 4$
16	15	$480 = 160 \cdot 3$