Mathematikwettbewerb 2006 der Jahrgangsstufe 11

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. a) Die Gerade $2x-3y+6=0$ wird an der Geraden $y=-x$ gespiegelt.
Bestimmen Sie die Gleichung der gespiegelten Geraden.

b) Die Gerade $2x+y=0$ wird um 90° um den Koordinatenursprung gedreht.
Bestimmen Sie die Gleichung der gedrehten Geraden.

c) Wie muss a gewählt werden, damit sich die drei Geraden
$x+y-6=0$
$3x-y-14=0$
$ax+3y+7=0$
in einem Punkt schneiden?

---

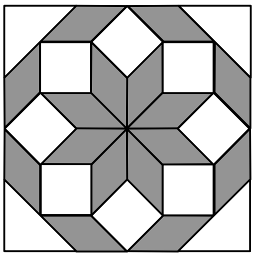
2. a) Für welche x gilt: $5^x-5^{x-1}=\dfrac{4}{125}$?

b) Lösen Sie nach x auf: $\sqrt{2^x}-\dfrac{12}{\sqrt{2^x}}=1$.

c) Bestimmen Sie x: $\sqrt[5]{x^2}-\sqrt[5]{x}=2$.

---

3. Das Mosaik besteht aus 4 gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecken, 16 Rauten und 8 Quadraten. Die Seitenlänge der Quadrate und Rauten sei 1.

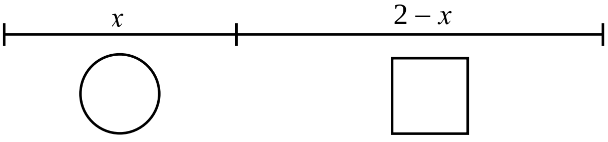


a) Wie groß ist die Fläche des Mosaiks?

b) Berechnen Sie bei der Raute die
- Winkel,
- Diagonalen,
- Fläche.

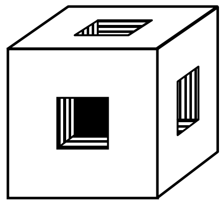
---

4. Ein Draht von 2 m Länge wird in zwei Teile zerschnitten. Aus dem einen Teil wird ein Kreis gebogen, aus dem anderen ein Quadrat.

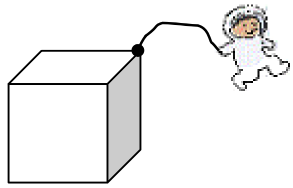


Wie muss man die Drahtteile, d.h. x wählen, damit die Summe der Flächen von Kreis und Quadrat minimal ist?
Wie groß ist die minimale Fläche?

5. a) Durch einen $3\times3\times3$ Würfel sind drei quadratische 1×1 Löcher gebohrt, und zwar so, dass die Bohrungen durch die Mitten gegenüberliegender Flächen verlaufen.
Wie groß ist die Oberfläche dieses durchlöcherten Würfels?
Der Körper hat Kanten der Länge 1 und 3.
Wie groß ist die Summe aller Kantenlängen?

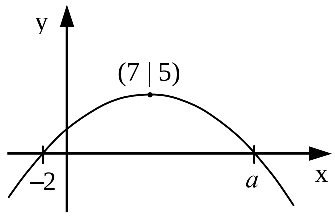


b) Eine Astronautin arbeitet im Außenbereich einer würfelförmigen Raumstation (Kantenlänge s). Sie ist mit einem Seil der Länge s an einer Ecke der Station befestigt.
Berechnen Sie den Teil der Oberfläche der Station, den sie erreichen kann.



---

6. a) Es sei $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Berechnen Sie $f(3) - f(\frac{1}{3})$.



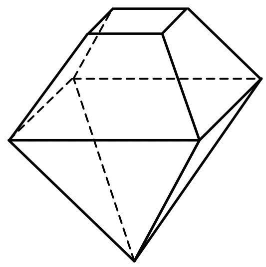
b) Eine Parabel mit dem Scheitel $(7\,|\,5)$ schneidet die negative x-Achse bei -2.
Welches ist die andere Nullstelle, d.h. wie groß ist a?

c) Es seien $f(x) = \frac{3x-7}{x+1}$ und $g(x) = \frac{x+7}{3-x}$. Berechnen Sie $f(g(x))$.

d) Wie muss b in $y = \log_b x$ gewählt werden, damit $(0{,}25\,|\,-1)$ auf der zugehörigen Kurve liegt?

---

7. Bei einem Oktaeder werden alle 6 Ecken so abgeschnitten, dass aus den 8 Dreiecksflächen Sechsecke entstehen.
(In der Abbildung ist nur eine Ecke abgeschnitten.)



a) Wie viele Ecken (e), Kanten (k) und Flächen (f) hat der „gestutzte“ Oktaeder?

b) Wie viele Diagonalen hat der neue Körper insgesamt?
Wie viele davon sind Raumdiagonalen, verlaufen also ganz im Inneren des Körpers?

---

8. a) Bei einem Rechteck wird die Länge um 50% und die Breite um 20% verlängert. Um wie viel Prozent verändert sich die Fläche?

b) Auf einer Fahrradtour durch Norwegen überquerte Nicole einen Breitenkreis, der genau halb so lang ist wie der Äquatorumfang.
Auf welchem geographischen Breitengrad befand sie sich?

c) Wenn bei einer zweistelligen Zahl die Ziffern vertauscht werden, erhält man eine Zahl, die um 20% größer ist als die Ausgangzahl. Bestimmen Sie diese Zahl.

Dieser Wettbewerb wird veranstaltet von: Zentrum für Mathematik e.V.
in Kooperation mit: Hessisches Kultusministerium
Ciba Ciba Spezialitätenchemie Lampertheim GmbH