Mathematikwettbewerb 2006 der Jahrgangsstufe 11

Lösungen

Hinweise zur Bewertung:

- Bei jeder Aufgabe können maximal 12 Punkte erreicht werden, wobei die fünf besten Aufgaben gewertet werden. Es sind also maximal 60 Punkte zu erreichen.
- Für jede Teilaufgabe ist ein Lösungsweg und die zugehörige Punktzahl vorgegeben. Bei anderen bzw. unvollständigen Lösungen sind die Punkte nach eigenem Ermessen zu verteilen, wobei die angegebene Punktzahl für die Teilaufgaben eingehalten werden sollte.

1. a) 1. Lösung: Die Gerade $2x-3y+6=0$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $(-3|0)$ und $(0|2)$. Die Gerade durch deren Spiegelpunkte $(-2|0)$ und $(0|3)$ hat die Gleichung $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$ bzw. $3x-2y+6=0$. *4 P*

   2. Lösung: Bei der Spiegelung an der 2. Winkelhalbierenden $y=-x$ wird der Punkt $(x\,|\,y)$ auf $(-y\,|\,-x)$ abgebildet. Also ist die gespiegelte Gerade $-2y+3x+6=0$.

   b) Die Gerade $2x+y=0$ hat die Steigung -2. Die dazu senkrechte Gerade hat die Steigung $\frac{1}{2}$, also $y=\frac{1}{2}x$ oder $x-2y=0$. *4 P*

   c) Der Schnittpunkt von $x+y-6=0$ und $3x-y-14=0$ ist $(5|1)$. Damit $a\cdot x+3y+7=0$ durch $(5|1)$ geht, muss $a=-2$ sein. *4 P*

---

2. a) Aus $5^x\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=4\cdot5^{-3}$ folgt $5^x=5^{-2}$ also $x=-2$. *4 P*

   b) Mit $z=\sqrt{2^x}$ folgt $z-\frac{12}{z}=1$ bzw. $z^2-z-12=0$ und somit $(z-4)\cdot(z+3)=0$. *4 P*
   Wegen $z>0$ ist $z=\sqrt{2^x}=4$, also $x=4$.

   c) Wegen $\sqrt[5]{x^2}=\left(\sqrt[5]{x}\right)^2$ gilt $0=\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-\sqrt[5]{x}-2=\left(\sqrt[5]{x}-2\right)\cdot\left(\sqrt[5]{x}+1\right)$,
   also ist $\sqrt[5]{x}$ entweder 2 oder -1, d.h. $x=32$ oder $x=-1$. *4 P*

---

3. a) Die Seitenlänge des quadratischen Mosaiks ist $2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$ und somit die Fläche $4\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)$. *3 P*

   b) Die Winkel der Raute sind $\frac{360°}{8}=45°$ und 135°. Die (Quadrate der) Diagonalen sind (Kosinussatz) $1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos45°=2-\sqrt{2}$ und $1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos135°=2+\sqrt{2}$.
   Die Fläche der Raute lässt sich auf verschiedene Arten berechnen: *9 P*
   $1\cdot1\cdot\sin45°=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ oder $1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Grundseite mal Höhe) oder
   $\frac{1}{16}\cdot\left(4\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)-12\cdot1^2\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. Mit dem Kreisradius $\frac{x}{2\pi}$ und der Quadratseite $\frac{2-x}{4}$ ergibt sich für die Fläche A in Abhängigkeit von x:

$$A(x)=\pi\cdot\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{2-x}{4}\right)^2=x^2\cdot\left(\frac{1}{4\pi}+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$ *6P*

<u>1. Lösung</u> (Quadratische Ergänzung):

$$A(x)=\frac{4+\pi}{16\pi}\cdot\left(x^2-\frac{4\pi}{4+\pi}\cdot x\right)+\frac{1}{4}=\frac{4+\pi}{16\pi}\cdot\left(x-\frac{2\pi}{4+\pi}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{4\cdot(4+\pi)}$$

$A(x)$ ist minimal für $x=\frac{2\pi}{4+\pi}$ und hat dort den Wert $\frac{1}{4}-\frac{\pi}{4\cdot(4+\pi)}=\frac{1}{4+\pi}$.

6P

<u>2. Lösung</u> (Ableitung):

Aus $A'(x)=2\cdot\left(\frac{1}{4\pi}+\frac{1}{16}\right)\cdot x-\frac{1}{4}=0$ folgt $x=\frac{2\pi}{4+\pi}$.

Wegen $A''(x)>0$ ist $A\left(\frac{2\pi}{4+\pi}\right)=\frac{1}{4+\pi}$ ein Minimum.

---

5. a) Oberfläche: $6\cdot3^2-6\cdot1^2+6\cdot4\cdot1^2=72$
Kantenlängen: $12\cdot3+12\cdot6\cdot1-12\cdot1=96$ *6 P*

b) Auf jeder der drei Flächen, die dem Befestigungspunkt benachbart sind, kann sie einen Viertelkreis erreichen, also insgesamt $\frac{3}{4}\cdot\pi\cdot s^2$. *6 P*

---

6. a) $f(3)-f(\frac{1}{3})=3+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)=0$ *3 P*

b) Die Nullstellen -2 und a liegen symmetrisch zur Geraden $x=7$ durch den Scheitel, also $a=16$. *3 P*

c) $f(g(x))=\frac{3\cdot g(x)-7}{g(x)+1}=\frac{3\cdot\frac{x+7}{3-x}-7}{\frac{x+7}{3-x}+1}=\frac{10x}{10}=x$. *3 P*

d) Aus $-1=\log_b\frac{1}{4}$ folgt $b^{-1}=\frac{1}{4}$ und somit $b=4$. *3 P*

---

7. Ein Oktaeder hat $E=6$ Ecken, $K=12$ Kanten und $F=8$ Flächen.
Ein „gestutzter“ Oktaeder besteht aus 8 Sechsecken und 6 Vierecken.

a) $e=4\cdot E=24$ oder $e=(8\cdot6+6\cdot4)\cdot\frac{1}{3}=24$,

$k=K+6\cdot4=36$ oder $k=(8\cdot6+6\cdot4)\cdot\frac{1}{2}=36$, $f=F+E=8+6=14$ *6 P*

7. b) Von jeder der e Ecken gehen $e-4$ Diagonalen aus, d.h. insgesamt *6 P*

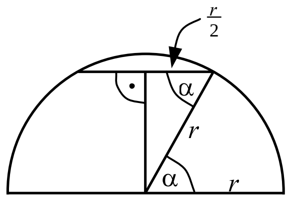
$e\cdot(e-4)\cdot\frac{1}{2}=24\cdot 20\cdot\frac{1}{2}=240$ Diagonalen.

Von jeder der e Ecken gibt es 7 Diagonalen, die nicht im Inneren verlaufen;

es gibt also $240-7\cdot e\cdot\frac{1}{2}=240-84=156$ innere Diagonalen.

---

8. a) Hat das Rechteck am Anfang die Seiten a und b, so ist die Fläche des neuen Rechtecks $a\cdot 1{,}5\cdot b\cdot 1{,}2=a\cdot b\cdot 1{,}8$, d.h. sie ist um 80% größer. *4 P*



b) Der Radius des Breitenkreises ist halb so groß wie der Radius r des Äquators, also ist der Breitengrad $\alpha=60°$. *4 P*

c) Sei $10\cdot a+b$ die gesuchte 2-stellige Zahl. Dann soll gelten $(10\cdot a+b)\cdot 1{,}2=10\cdot b+a$ also $5\cdot a=4\cdot b$. Wegen $a,b\le 9$ folgt $a=4$ und $b=5$, d.h. die gesuchte Zahl ist 45. *4 P*

Für Ihre Auswertung (zur Übernahme auf den Rückmeldebogen):

Ergebnisse der Einzelaufgaben:

	Anzahl der Schüler/innen				
Aufgabe	Nicht bearb.	0-3 Pkte	4-6 Pkte	7-9 Pkte	10-12 Pkte
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

Gesamtergebnis:

Erreichte Punktzahl	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60
Anzahl Schüler/innen												

Teilnehmerzahl: .... Durchschnittlich erreichte Punktzahl: ....

Versäumen Sie bitte nicht, uns bis zum **07. April 2006** die Schulsiegerin bzw. den Schulsieger zu melden (Vorname, Nachname, Geschlecht, erreichte Punktzahl); bei **50 oder mehr Punkten** bitte Bearbeitung im **Original** zuschicken.
Die Schulsiegerin bzw. der Schulsieger erhalten, wenn sie mindestens 30 Punkte erreicht haben, eine Urkunde und einen Sachpreis.