

Mathematikwettbewerb 2007 der Jahrgangsstufe 11

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

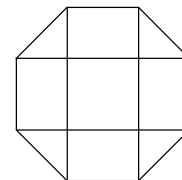
1. a) Zeichnen Sie das Viereck mit den Ecken $A(1|0)$, $B(5|0)$, $C(5|8)$ und $D(1|5)$.
Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des Vierecks.
Wie muss die Steigung m der Ursprungsgeraden $y = m \cdot x$ gewählt werden, damit die Gerade das Viereck in zwei flächengleiche Teile zerlegt?
- b) Gegeben sind Dreiecke ABC mit $A(0|3)$, $B(4|0)$ und $C(c|5)$ mit $0 < c < 4$.
Wie muss c gewählt werden, damit der Dreieckswinkel bei A 90° beträgt?

2. a) Die Nullstellen von $y = x^2 - 5x + 2$ sind Höhe und Breite eines Rechtecks.
Berechnen Sie Umfang und Fläche des Rechtecks.
- b)

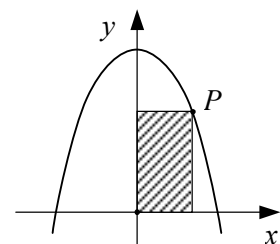
1. Zeile				1			
2. Zeile			2	3	4		
3. Zeile		5	6	7	8	9	
4. Zeile	10	11	12	13	14	15	16

 Wenn das dreieckige Zahlenschema fortgesetzt wird, welche Zahl steht dann direkt unterhalb von 144?
In welcher Zeile steht 2007?
- c) Berechnen Sie x und y , wenn gilt
 $\sqrt{x^3 + x^3 + x^3 + x^3 + x^3} = 25$ und $2^{2007} - 2^{2006} - 2^{2005} + 2^{2004} = y \cdot 2^{2004}$

3. a) Die Fläche des Quadrates ist 4. Wie groß ist die Fläche des regelmäßigen Achtecks?
- b) Die Seiten eines Dreiecks haben die Längen 5, 12 und n , wobei n eine ganze Zahl ist.
- (i) Wie viele solcher Dreiecke gibt es, d.h. für welche n gelten die Dreiecksungleichungen?
- (ii) Für welches n hat das Dreieck maximale Fläche?
- (iii) Für welche n ist das Dreieck stumpfwinklig?

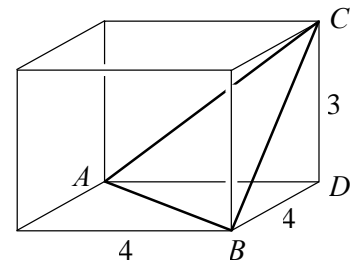


4. Ein Rechteck im Koordinatensystem liegt im 1. Quadranten mit einer Ecke im Koordinatenursprung und zwei Seiten auf den Koordinatenachsen. Die vierte Ecke P liegt auf der Parabel $y = 12 - x^2$.
Wie muss P auf der Parabel gewählt werden, damit das Rechteck maximale Fläche hat? Wie groß ist diese maximale Fläche?
Hinweis: Zur Berechnung des Maximums ohne Differentialrechnung ist die Formel $3b^2x - x^3 = 2b^3 - (x - b)^2 \cdot (x + 2b)$ hilfreich.



5. In einem $4 \times 4 \times 3$ Quader sind A , B und C die zur Ecke D benachbarten Ecken.

- a) Berechnen Sie die Länge der Seiten von Dreieck ABC und dessen Fläche.
- b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $ABCD$.
- c) Welchen Abstand hat D zur Ebene durch A , B und C ?



6. a) Bestimmen Sie c so, dass der Scheitel der Parabel $y = x^2 - 8x + c$ ein Punkt der x -Achse ist.
- b) Die Parabel $y = ax^2 + bx + c$ hat eine positive und eine negative Nullstelle. Der Scheitel hat die Koordinaten $(4 | -5)$. Welche der Koeffizienten a , b und c sind positiv und welche sind negativ?
- c) Bestellt man bei einem Verlag n -mal das Buch „Problemlösen leicht gemacht“, so gibt es Mengenrabatte, und zwar gilt für den Preis $P(n)$ in Euro

$$P(n) = \begin{cases} 12n & \text{für } 1 \leq n \leq 24, \\ 11n & \text{für } 25 \leq n \leq 48, \\ 10n & \text{für } n \geq 49. \end{cases}$$

Bei dieser Preisgestaltung kosten 25 Bücher weniger als 24, denn $25 \cdot 11 < 24 \cdot 12$.
Für welche weiteren Werte von n ist es billiger, mehr als n Bücher statt genau n zu kaufen?

7. a) Wie viele 5-stellige Zahlen gibt es?
- b) Wie viele 5-stellige Zahlen, die jede der Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 genau einmal enthalten, gibt es?
Wie viele dieser Zahlen sind durch 4 teilbar?
- c) Wie viele 5-stellige Zahlen enthalten mindestens einmal die Ziffer 6?

8. a) Die Anzahl der Sekunden in 6 Wochen ist $n!$. Bestimmen Sie n .
- b) Bei einem ersten 1000 m Lauf ist Claus 100 m hinter Uwe, als dieser das Ziel erreicht. Beim zweiten Lauf bekommt Claus einen Vorsprung, und zwar startet Uwe 100 m hinter der Startlinie, d.h. Uwe läuft 1100 m, während Claus wie beim ersten Mal 1000 m läuft. Beide haben beim zweiten Lauf die selbe konstante Geschwindigkeit wie im ersten Lauf. Wer läuft als Erster durchs Ziel und wie groß ist nun der Abstand?

