Mathematikwettbewerb 2007 der Jahrgangsstufe 11

Lösungen

Hinweise zur Bewertung:

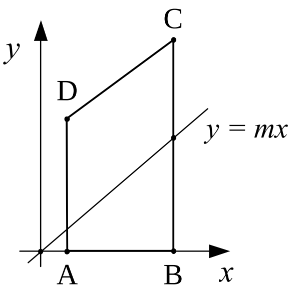
- Bei jeder Aufgabe können maximal 12 Punkte erreicht werden, wobei die fünf besten Aufgaben gewertet werden. Es sind also maximal 60 Punkte zu erreichen.
- Für jede Teilaufgabe ist ein Lösungsweg und die zugehörige Punktzahl vorgegeben. Bei anderen bzw. unvollständigen Lösungen sind die Punkte nach eigenem Ermessen zu verteilen, wobei die angegebene Punktzahl für die Teilaufgaben eingehalten werden sollte.

1. a) Umfang: $AB + BC + CD + DA = 4 + 8 + \sqrt{4^2 + 3^2} + 5 = 22$

Trapezfläche: $\frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB = \frac{1}{2}(5+8) \cdot 4 = 26$

$y = m \cdot x$ schneidet AD in $(1 \mid m)$ und BC in $(5 \mid 5m)$.

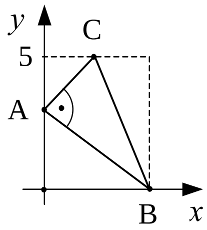
Aus $\frac{1}{2}(m + 5m) \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 26$ folgt $m = \frac{13}{12}$. **9 P**



b) Steigung von AB: $-\frac{3}{4}$

Steigung von AC: $\frac{2}{c}$ **3 P**

Aus $-\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{c} = -1$ folgt $c = \frac{3}{2}$.



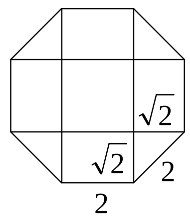
2. a) Bei jeder quadratischen Gleichung $x^2 - px + q = 0$ gilt für die Lösungen x_1 und x_2: **4 P**
$x_1 + x_2 = p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$. Also hat das Rechteck den Umfang 10 und die Fläche 2.

b) Die n-te Zeile endet auf n^2. Also steht unter $144 = 12^2$ die vorletzte Zahl der 13. Zeile, d.h. $13^2 - 1 = 168$. Wegen $44^2 < 2007 < 45^2$ steht 2007 in der 45. Zeile. **4 P**

c) Aus $5^4 = 25^2 = x^3 + x^3 + x^3 + x^3 + x^3 = 5x^3$ folgt $x = 5$. **4 P**

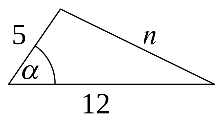
$$y = \frac{2^{2007} - 2^{2006} - 2^{2005} + 2^{2004}}{2^{2004}} = 2^3 - 2^2 - 2 + 1 = 8 - 4 - 2 + 1 = 3.$$

3. a) Die Seitenlänge des Achtecks ist 2, also ist die Fläche **3 P**
$4 + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 = 8 + 8\sqrt{2}$



b) (i) Es muss gelten $12 - 5 < n < 12 + 5$, also gibt es für $n = 8, 9, \dots, 16$ insgesamt 9 Dreiecke. **3 P**

(ii) Die Dreiecksfläche $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 \cdot \sin\alpha$ ist maximal, wenn $\sin\alpha$ maximal ist.
Für $n = 13$ ist $\alpha = 90°$ und $\sin\alpha = 1$. **3 P**



(iii) Für n muss gelten $n^2 < 12^2 - 5^2$ oder $n^2 > 12^2 + 5^2$, also $n = 8, 9, 10$ und $n = 14, 15, 16$. **3 P**

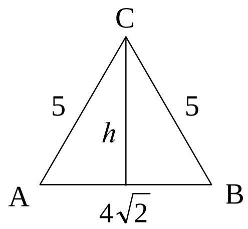
4. Mit $P(x\,|\,12-x^2)$ ergibt sich für die Fläche f in Abhängigkeit von x
$f(x) = x \cdot (12-x^2)$, $0 < x < \sqrt{12}$. *4 P*

1. Lösung: Es gilt (vgl. Hinweis) $f(x) = 12x - x^3 = 16 - (x-2)^2 \cdot (x+4)$. *8 P*
Da $x+4>0$ ist, wird f maximal für $x=2$ mit $f(2)=16$

2. Lösung: Aus $f\,'(x) = 12 - 3x^2 = 0$ folgt $x = 2$. Wegen $f\,''(x) = -6x < 0$ für $x = 2$
hat f für $x=2$ ein Maximum mit $f(2) = 2 \cdot (12-2^2) = 16$

---

5. a) Für die Höhe h des Dreiecks ABC gilt $h^2 = 5^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 17$,
also ist die Fläche $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{17} = 2\sqrt{34}$. *4 P*



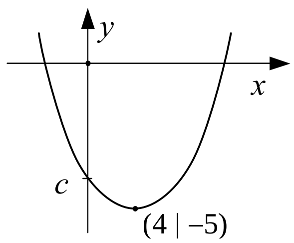
b) Volumen: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} 4^2 \cdot 3 = 8$. *4 P*

c) Ist a der Abstand von D zur Ebene durch A, B und C, so ist das Volumen des Körpers $ABCD$
(vgl. a) und b)): $\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{34} \cdot a = 8$, also $a = \frac{12}{\sqrt{34}}$. *4 P*

---

6. a) Wegen $y = x^2 - 8x + c = (x-4)^2 + c - 16$ ist der Scheitel bei $(4\,|\,c-16)$.
Für $c = 16$ liegt er auf der x-Achse. *4 P*

b) Die Parabel ist nach oben geöffnet, d.h. $a > 0$,
und schneidet die negative y-Achse, also $c < 0$.
Wegen $y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$
ist $\frac{b}{2a} = -4$. Wegen $a > 0$ folgt daraus $b < 0$. *4 P*



c) Aus der Wertetafel

n	22	23	24	25	44	45	46	47	48	49
$P(n)$	264	276	288	275	484	495	506	517	528	490

folgt, dass es für $n = 23, 24, 45, 46, 47$ und 48 billiger ist, mehr als n Bücher zu kaufen. *4 P*

---

7. a) 1. Lösung: Von den Zahlen 10000, 10001, ..., 99999 gibt es $99999 - 10000 + 1 = 90000$.
2. Lösung: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4$ *4 P*

b) Die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 lassen sich auf $5! = 120$ Arten anordnen. Also gibt es 120 solche 4-stelligen Zahlen.
Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die Zahl aus den letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar ist.
Also müssen die gesuchten Zahlen auf 12, 24, 32 oder 52 enden. Somit gibt es $4 \cdot 3! = 24$ durch 4 teilbare Zahlen. *4 P*

c) Keinmal die Ziffer 6 enthalten $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 52488$ Zahlen.
Also enthalten $90000 - 52488 = 37512$ mindestens einmal die Ziffer 6. *4 P*

8. a) Die Anzahl der Sekunden ist $6 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 10!$ *4 P*

b) Seien u und c die Geschwindigkeiten von Uwe und Claus. Sie brauchen für 1000 m bzw. 900 m die gleiche Zeit: $\frac{1000}{u} = \frac{900}{c}$, also gilt $c = 0{,}9 \cdot u$.

Für 1100 m braucht Uwe die Zeit $\frac{1100}{u}$. Für 1000 m braucht Claus die Zeit $\frac{1000}{c} = \frac{1000}{0{,}9 \cdot u}$.

Wegen der positiven Zeitdifferenz $\frac{1000}{0{,}9 \cdot u} - \frac{1100}{u} = \frac{10}{0{,}9u} > 0$ geht Uwe als erster durchs Ziel, und zwar mit einem Vorsprung von 10 m, denn Claus muss noch den Weg *8 P*

$c \cdot \frac{10}{0{,}9u} = 0{,}9 \cdot u \cdot \frac{10}{0{,}9u} = 10$ zurücklegen.

Für Ihre Auswertung (zur Übernahme auf den Rückmeldebogen):

Ergebnisse der Einzelaufgaben:

	Anzahl der Schüler/innen				
Aufgabe	Nicht bearb.	0-3 Pkte	4-6 Pkte	7-9 Pkte	10-12 Pkte
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

Gesamtergebnis:

Erreichte Punktzahl	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60
Anzahl Schüler/innen												

Teilnehmerzahl: .... Durchschnittlich erreichte Punktzahl: ....

Versäumen Sie bitte nicht, uns bis zum **31. März 2007** die Schulsiegerin bzw. den Schulsieger zu melden (Vorname, Nachname, Geschlecht, erreichte Punktzahl); diese erhalten, wenn sie mindestens 30 Punkte erreicht haben, eine Urkunde und einen Sachpreis.
Bei **50 oder mehr Punkten** bitte die Bearbeitung im **Original** zuschicken.