

Mathematikwettbewerb 2009 der Jahrgangsstufe 11

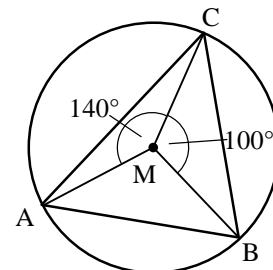
Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1.
 - a) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem.
 - b) Zeichnen Sie die drei Geraden $y = x$, $y = -x$ und $y = 6$ in ein Koordinatensystem. Die Geraden begrenzen im 1. und 2. Quadranten ein Dreieck. Berechnen Sie für dieses Dreieck den Radius des Inkreises.

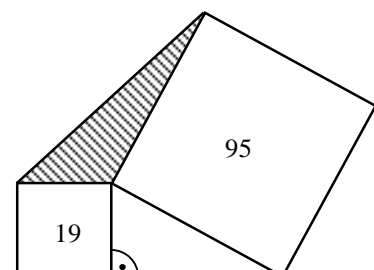
2.
 - a) Für welche x gilt $27(x-1)^3 + 8 = 0$?
 - b) Welche Lösungen hat die Gleichung $x^2 + 2008x = 2009$?
 - c) Gegeben ist ein Quadrat, dessen eine Seite auf der x -Achse liegt und dessen beide anderen Ecken auf der Kurve $y = \frac{1}{x^2}$ liegen. Berechnen Sie die Fläche des Quadrates.

3.
 - a) Sei M der Mittelpunkt des Umkreises von Dreieck ABC mit $\sphericalangle CMA = 140^\circ$ und $\sphericalangle BMC = 100^\circ$. Berechnen Sie $\sphericalangle ACB$.

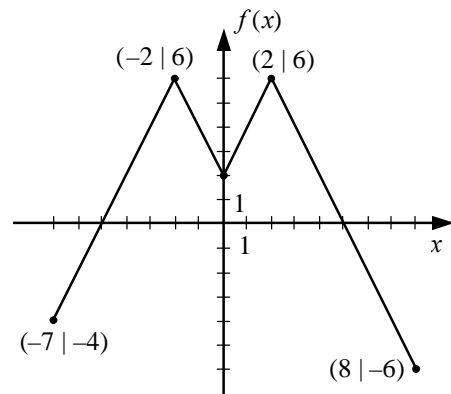


- b) Gegeben ist ein Dreieck, dessen Seiten sich wie 3:4:5 verhalten und dessen Umkreisradius 3 ist. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks.

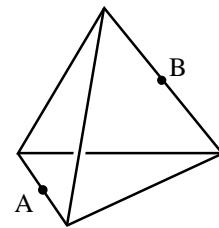
- c) Über der Hypotenuse und einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks werden Quadrate errichtet, deren Flächen 19 und 95 sind (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Fläche des schraffierten Dreiecks.



4. a) Für eine Funktion f gilt: $f(2x+1) = 4x^2 + 14x$.
Berechnen Sie die Nullstellen von f .
- b) Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = ax + b$.
Wie müssen a und b gewählt werden, damit für die
Umkehrfunktion f^{-1} gilt $f^{-1}(x) = bx + a$?
- c) Die Abbildung zeigt den Graph einer Funktion f .
Für welche x gilt $f(f(x)) = 6$?



5. a) Ein Käfer lebt auf der Oberfläche eines
regelmäßigen Tetraeders mit der Kantenlänge 1. Er
möchte vom Mittelpunkt A einer Kante zum
Mittelpunkt B der gegenüberliegenden Kante
krabbeln. Berechnen Sie die Länge des kürzesten
Weges.



- b) Ein Würfel (Kantenlänge 2) wird durch zwei
Schnitte in drei Prismen zerlegt, von denen zwei
kongruent sind (Abb. 1). Danach wird der Würfel
in der selben Art entlang der gestrichelten Linien
zerlegt (Abb. 2). Dadurch entstehen neun
Teilstücke.
Berechnen Sie das Volumen des Teils, das die
Ecke A enthält.

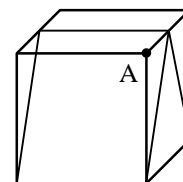


Abb. 1

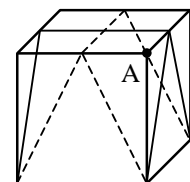
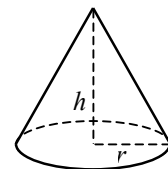
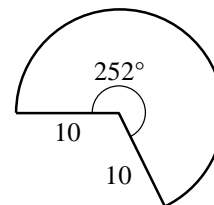
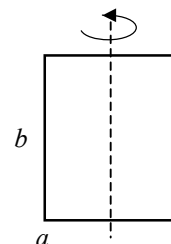


Abb. 2

- c) Ein 252° -Sektor eines Kreises mit Radius 10
wird zu einem Kegel geformt.
Berechnen Sie die Höhe h und den Radius r des
Kegels.



6. a) Wie müssen die Koeffizienten a und b in dem Polynom 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2$
gewählt werden, damit $f(x) = \frac{4}{27} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right)$ gilt?
Für welches positive x hat f ein Maximum? Wie groß ist dieser maximale Funktionswert?
- b) Ein Rechteck mit den Seiten a und b rotiert um eine seiner
Symmetrieachsen und erzeugt dabei einen Zylinder der Höhe b
und dem Radius $\frac{a}{2}$. Der Umfang des Rechtecks sei 2.
Wie müssen a und b gewählt werden, damit das Volumen V des
Zylinders maximal wird?

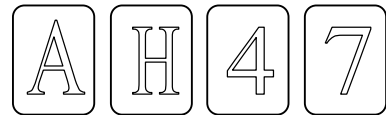


7. Ein Gitternetz besteht aus 100 Zeilen und 100 Spalten, die von 1 bis 100 durchnummeriert sind.
In der 2. Zeile ist jedes 2. Quadrat gefärbt, in der 3. Zeile jedes 3. Quadrat. In der n -ten Zeile ist jedes n -te Quadrat gefärbt. (In der 1. Zeile ist kein Quadrat gefärbt.)
In welchen Spalten befindet sich ...

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...	100
1														
2		■		■		■		■		■		■	...	■
3			■		■		■		■		■		...	
4				■				■				■	...	■
5					■					■			...	■
6						■						■	...	
7							■						...	
...														
100														

- a) nur ein gefärbtes Quadrat?
b) eine gerade Anzahl gefärbter Quadrate?
c) fünf aufeinander folgende Quadrate? (z.B. befinden sich in der 12. Spalte drei aufeinander folgende gefärbte Quadrate.)
d) Wie viele gefärbte Quadrate gibt es in der 7. Zeile und wie viele in der 24. Spalte?

8. a) Auf jeder der vier Karten befindet sich auf einer Seite ein Buchstabe, auf der anderen eine Zahl. Es geht um folgende Behauptung:



Wenn auf der einen Seite ein Vokal ist, befindet sich auf der anderen Seite eine gerade Zahl.

Welche der vier Karten müssen umgedreht werden um festzustellen, ob die Behauptung für alle Karten wahr oder falsch ist?

- b) Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten $a + b = 20$.
Wie müssen a und b gewählt werden, damit die Hypotenuse minimal wird?
c) Welchen Abstand hat der Koordinatenursprung vom Graphen von $y = \sqrt{6x - x^2} - 9$?
d) Nelly bezahlt für ihren Telefonanschluss eine feste monatliche Grundgebühr und einen Betrag, der sich aus der Länge ihrer Telefongespräche errechnet. Im Januar zahlte sie 12 Euro, aber im Februar 17 Euro, weil sie doppelt so lange telefonierte wie im Januar. Wie hoch ist die Grundgebühr?

