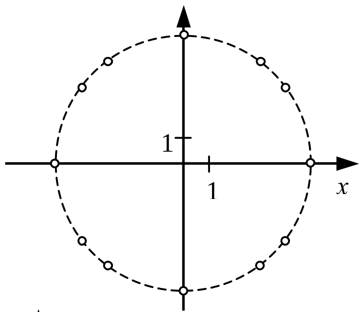
Mathematikwettbewerb 2009 der Jahrgangsstufe 11

Lösungen

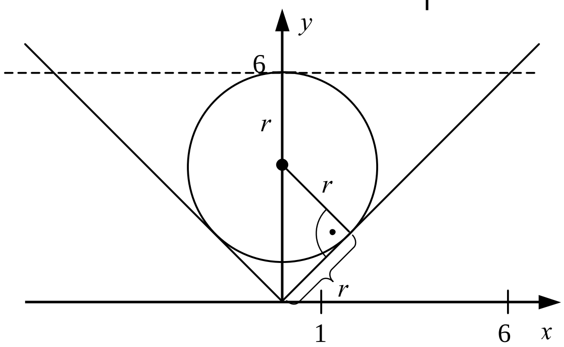
Hinweise zur Bewertung:

- Bei jeder Aufgabe können maximal 12 Punkte erreicht werden, wobei die fünf besten Aufgaben gewertet werden. Es sind also maximal 60 Punkte zu erreichen.
- Für jede Teilaufgabe ist ein Lösungsweg und die zugehörige Punktzahl vorgegeben. Bei anderen bzw. unvollständigen Lösungen sind die Punkte nach eigenem Ermessen zu verteilen, wobei die angegebene Punktzahl für die Teilaufgaben eingehalten werden sollte.

1. a) Die 12 ganzzahligen Lösungen von $x^2 + y^2 = 25$ sind $(0\,|\pm 5)$, $(\pm 5\,|\,0)$, $(\pm 3\,|\pm 4)$, $(\pm 4\,|\pm 3)$. Sie liegen auf einem Kreis mit Radius 5. *6 P*



b) Für den Radius r des Kreises gilt $(6-r)^2 = r^2 + r^2$, also $6 - r = r\sqrt{2}$ und somit $r = \dfrac{6}{\sqrt{2}+1} = 6\left(\sqrt{2}-1\right)$. *6 P*

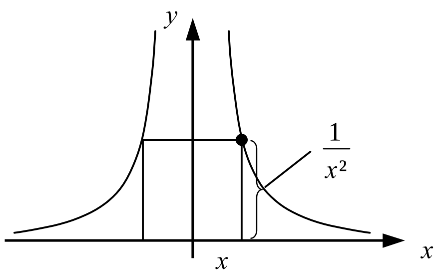


2. a) Aus $27(x-1)^3 + 8 = 0$ folgt $x - 1 = \sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}$, also $x = -\dfrac{2}{3} + 1 = \dfrac{1}{3}$. *4 P*

b) 1. Lösung: Aus $x^2 + 2008x = 2009$ folgt $x^2 + 2009x = x + 2009$, also $(x-1)(x+2009) = 0$, und somit $x = 1$ oder $x = -2009$. *4 P*

2. Lösung: Aus $x^2 + 2008x - 2009 = 0$ folgt $x = -\dfrac{2008}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{2008}{2}\right)^2 + 2004} = -1004 \pm 1005$ und somit $x = 1$ oder $x = -2009$.

c) Für die Seiten des Quadrats gilt $2x = \dfrac{1}{x^2}$ also $x = 2^{-\frac{1}{3}}$. Die Fläche ist $4x^2 = 2^{\frac{4}{3}} = 2\sqrt[3]{2}$. *4 P*



3. a) 1. Lösung: Die Basiswinkel in den gleichschenkligen Dreiecken AMC und BMC sind 20° bzw. 40°. Also ist $\sphericalangle ACB = 20° + 40° = 60°$. *4 P*

2. Lösung: Der Mittelpunktswinkel AMB ist 360° – 140° – 100° = 120°. Also ist der Umfangswinkel $120° \cdot \frac{1}{2} = 60°$.

b) Dreiecke mit den Seiten 3k, 4k und 5k sind rechtwinklig, da $(3k)^2 + (4k)^2 = (5k)^2$ gilt. Der Umkreis ist der Thaleskreis über der Hypotenuse, also gilt $3 = \frac{5k}{2}$. Somit ist die Fläche *4 P*

$\frac{1}{2} \cdot 3k \cdot 4k = 6k^2 = 6\left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{216}{25}$.

c) Das schraffierte Dreieck und das rechtwinklige Dreieck haben die gleiche Fläche, denn es gilt $\frac{1}{2}\sqrt{19}\sqrt{95}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{19}\sqrt{95}\sin(180° - \alpha)$, wobei α der Winkel zwischen Kathete und Hypotenuse ist. Die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks ist $\frac{1}{2}\sqrt{19}\sqrt{95-19} = \frac{1}{2}\sqrt{1444} = 19$. *4 P*

---

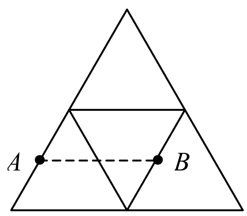
4. a) Mit $t = 2x + 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}(t-1)$ gilt $f(t) = f(2x+1) = 2x(2x+7) = (t-1)(t+6)$. Also ist $f(1) = f(-6) = 0$ *4 P*

b) Aus $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ folgt $a(bx + a) + b = x$, also $a \cdot b = 1$ und $a^2 + b = 0$. Hieraus folgt $a^2 + \frac{1}{a} = 0$ und $b + \frac{1}{b^2} = 0$, also $a = -1$ und $b = -1$. *4 P*

c) Wegen $f(2) = 6 = f(-2)$ gilt für die gesuchten x: $f(x) = \pm 2$, also $x = \pm 4, 0, \pm 6$. *4 P*

---

5. a) Entfaltet man die Fläche der Tetraeders in die Ebene, so sind A und B die Mittelpunkte von gegenüberliegenden Seiten einer Raute mit Seitenlänge 1. Die gesuchte Entfernung ist also 1. *4 P*



b) Die Ecke A gehört zu einer Pyramide mit Höhe 2 und quadratischer Grundfläche mit Seite 1. Also ist das Volumen $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{3}$. *4 P*

c) Die Kegelgrundfläche ist ein Kreis für dessen Umfang u gilt $\frac{u}{2\pi \cdot 10} = \frac{252°}{360°}$, also $u = 14\pi$. Aus $2\pi r = 14\pi$ folgt $r = 7$ und $h = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51}$. *4 P*

---

6. a) Durch Ausmultiplizieren ergibt sich $f(x) = x^2 - x^3$, also $a = -1$ und $b = 1$. *f* wird maximal für $x = \frac{2}{3}$ mit $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$. *6 P*

b) Aus $2a + 2b = 2$ folgt $b = 1 - a$ und $V = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot b = \frac{\pi}{4}a^2 \cdot (1-a) = \frac{\pi}{4}\left(a^2 - a^3\right)$. Nach a) ist V maximal für $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$. *6 P*

---

7. In der n-ten Spalte sind diejenigen Quadrate gefärbt, deren Zeilennummern ein Teiler (größer 1) von n ist.

   a) In den Spalten mit den Nummern 2, 3, 5, 7, 11, ... (Primzahlen). *3 P*

   b) In den Spalten mit den Nummern 4, 9, 16, 25, 36, ... (Quadratzahlen). *3 P*

   c) In Spalte Nr. 60, denn 60 hat u.a. die Teiler 2, 3, 4, 5 und 6. *3 P*

   d) In der 7. Zeile sind es 14 Quadrate, in der 24. Spalte sind es 7 Quadrate. *3 P*

---

8. a) 1. Lösung: Logisch gleichbedeutend zu der Behauptung ist: „Wenn auf einer Seite eine ungerade Zahl ist, befindet sich auf der anderen Seite ein Konsonant“. Also müssen nur „A“ und „7“ umgedreht werden. *3 P*

   2. Lösung: Auf der Karte „A“ könnte eine ungerade Zahl stehen und auf der Karte „7“ ein Vokal. In beiden Fällen wäre die Behauptung falsch, also müssen diese – und nur diese – Karten umgedreht werden.

   b) Für die Hypotenuse c gilt $c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (20-a)^2 = 2a^2 - 40a + 400 = 2(a-10)^2 + 200$. Also ist c minimal für $a = 10$ und somit für $b = 10$. *3 P*

   c) Wegen $y = \sqrt{6x - x^2 - 9} = \sqrt{-(x-3)^2}$ besteht der Graph nur aus dem Punkt $(3|0)$. Der Abstand zu $(0|0)$ ist 3. *3 P*

   d) Die 5 Euro mehr im Februar sind die Kosten für Gespräche, die im Februar mehr geführt wurden. Also kosten die Gespräche 5 Euro im Januar und 10 Euro im Februar. Die Grundgebühr beträgt 7 Euro. *3 P*

Für Ihre Auswertung (zur Übernahme auf den Rückmeldebogen):

Ergebnisse der Einzelaufgaben:

Aufgabe	Anzahl der Schüler/innen				
	Nicht bearb.	0-3 Pkte	4-6 Pkte	7-9 Pkte	10-12 Pkte
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

Gesamtergebnis:

Erreichte Punktzahl	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60
Anzahl Schüler/innen												

Teilnehmerzahl: .... Durchschnittlich erreichte Punktzahl: ....

Versäumen Sie bitte nicht, uns bis zum **03. April 2009** die Schulsiegerin bzw. den Schulsieger zu melden (Vorname, Nachname, Geschlecht, erreichte Punktzahl); diese erhalten, wenn sie mindestens 30 Punkte erreicht haben, eine Urkunde und einen Sachpreis.
Bei **50 oder mehr Punkten** bitte die Bearbeitung im **Original** zuschicken.