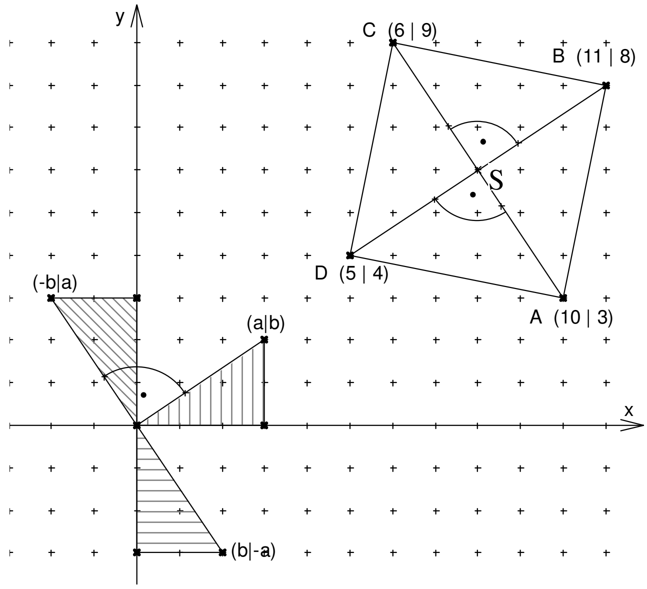
Lösungen zu den Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb 2010 der Jahrgangsstufe 11

1. a) 1. Lösung

Bei einer 90° - Drehung um $(0|0)$ wird $(a|b)$ auf $(-b|a)$ bzw. $(b|-a)$ abgebildet.

Sei $S\left(\frac{10+6}{2}\middle|\frac{3+9}{2}\right)=S(8|6)$ der Mittelpunkt von AC.

Eine 90°-Drehung von A und C um S ergibt $D(5|4)$ und $B(11|8)$.



2. Lösung

Der Schnittpunkt der Diagonalen ist $S(8|6)$ mit

$AS^2=(10-8)^2+(3-6)^2=13$.

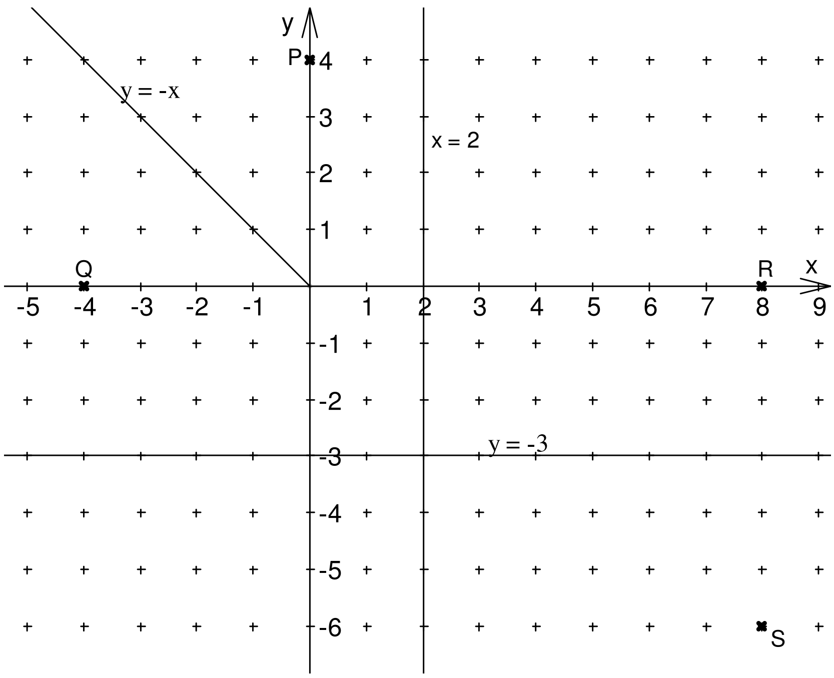
B und D liegen auf der Mittelsenkrechten von AC: $y=\frac{2}{3}(x+1)$ und haben von S den Abstand

$(x-8)^2+(y-6)^2=13$. Hieraus folgt $(x-8)^2+\left(\frac{2}{3}(x+1)-6\right)^2=13$, also $(x-8)^2=9$.

Somit $x=8\pm3$ und $y=6\pm2$ und daher $B(11|8)$ und $D(5|4)$.

b) Die beiden Flächendiagonalen können durch eine weitere Flächendiagonale zu einem gleichseitigen Dreieck ergänzt werden. Somit ist $\alpha=60°$.

c) $P(0|4)\longrightarrow Q(-4|0)\longrightarrow R(8|0)\longrightarrow S(8|-6)$



2. a) $(0,1)\times(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)$

$(-1,0)\times(-1,0)=((-1)\cdot(-1)-0\cdot 0, (-1)\cdot 0+0\cdot(-1))=(1,0)$

b) Aus $(a,b)^2 := (a,b)\times(a,b)=(a^2-b^2, 2ab)$ folgt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=(0,1)$.

c) Aus a) und b) folgt:

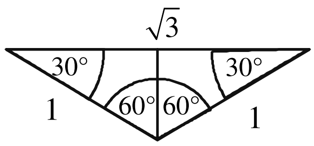
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=(0,1)^2=(-1,0)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^8=(-1,0)^2=(1,0)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{64}=(1,0)^8=(1,0)$$

---

3. Die Dreiecke in den Ecken A, B und C sind gleichseitig mit der Seitenlänge 1.
Die gleichschenkligen Dreiecke zwischen den Quadraten haben die Seiten $1, 1, \sqrt{3}$.
Also hat das Dreieck ABC die Seitenlänge $2+\sqrt{3}$



und die Fläche $\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4}\sqrt{3}=3+\frac{7}{4}\sqrt{3}$ (3 Quadrate und 7 flächengleiche Dreiecke).

---

4. a) Mit $g(3)=3k+5$ folgt $f(g(3))=2(3k+5)^2+k=18k^2+61k+50=0$ somit $k=\frac{1}{36}(-61\pm 11)$,

also $k=-\frac{25}{18}$ oder $k=-2$.

b) Aus $6x^2-2kx+7k=0$ folgt $x=\frac{1}{6}\left(k\pm\sqrt{k(k-42)}\right)$.

Eine Nullstelle für $k=0$ oder $k=42$.
Keine Nullstelle für $0<k<42$.

---

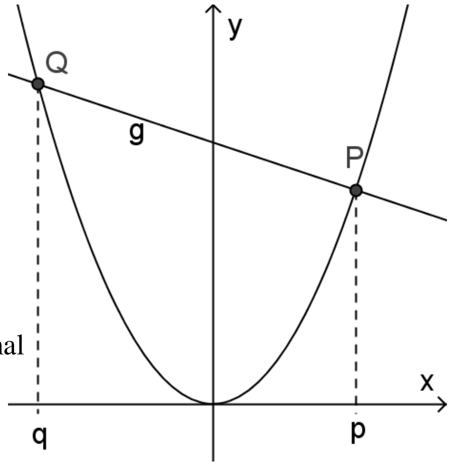
5. a)

	Würfel	Gezelteter Würfel	Rhombendodekaeder	Rhombenkuboktaeder
e	8	14	14	24
f	6	24	12	26
k	12	36	24	48
$e+f-k$	2	2	2	2

b) (i) Der Radius der Umkugel ist $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$. Also $h=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a-\frac{1}{2}a=\frac{a}{2}\cdot(\sqrt{3}-1)$.

(ii) $h=\frac{1}{2}\cdot a$

6. g hat die Gleichung $y=-\frac{1}{2p}\cdot x+p^2+\frac{1}{2}$ bzw. $y-p^2=-\frac{1}{2p}(x-p)$.



a) Aus $q^2-p^2=-\frac{1}{2p}(q-p)$ folgt $q=-p-\frac{1}{2p}$

(wegen $q^2-p^2=(q-p)(q+p)$).

b) Es gilt $s=p^2+q^2=2p^2+\frac{1}{4p^2}+1$.

1. Lösung durch quadratische Ergänzung:

Aus $s=2p^2+\frac{1}{4p^2}+1=1+\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}p-\frac{1}{2p}\right)^2$ folgt s minimal für $p\sqrt{2}=\frac{1}{2p}$, d.h. $p=2^{-\frac{3}{4}}$.

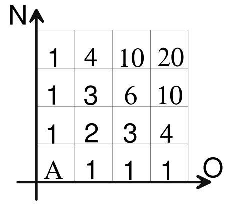
2. Lösung durch Differentialrechnung:

Aus $s'=4p-\frac{1}{2p^3}=0$ folgt $p=2^{-\frac{3}{4}}$. Da $s''=4+\frac{3}{2p^4}>0$ für $p=2^{-\frac{3}{4}}$ liegt ein Minimum vor.

---

7. a) In jedem Quadrat steht die Anzahl der Wege, die von A zu diesem Quadrat führen.

Also gibt es 20 Wege von A nach B.

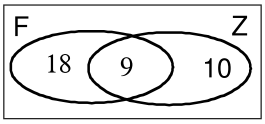


b) Sei s die Summe der Zahlen auf jeder der drei Strecken. Dann gilt:
$3s=1+2+3+4+5+6+7+2z$, also $3s=28+2z$.
$28+2z$ ist für $z=1;4;7$ durch 3 teilbar. Also muss $z=7$ sein.

c) $3-z$ muss $\pm1, \pm3, \pm5$ oder ±15 sein.
Hieraus folgt $z=-12,-2,0,2,4,6,8,18$.

d) Es müssen zwei der drei roten Smarties gezogen werden. Dies geht auf $\binom{3}{2}=3$ Arten.

Also $P=\frac{3}{\binom{5}{3}}=\frac{3}{10}$.

8. a) 

In dem Diagramm sind F und Z die Einwohner, die mit dem Flugzeug bzw. mit dem Zug verreist sind. Also sind $100-27-19+9=63$ Prozent weder mit dem Flugzeug noch mit dem Zug verreist.

b) Sei n die Einwohnerzahl von Steinheim. Während der Festspiele kommen $19 \cdot n$ Gäste in die Stadt. Somit steigt die Einwohnerzahl auf das 20 fache an. Bei der Abreise verlassen also $\frac{19}{20}=95\%$ die Stadt.

c)

Männer	5	1	1	3	3
Gruben	3	3	1	1	5
Zeit in Stunden	9	45	15	5	25

Also werden 25 Stunden benötigt.

d) Es gilt $365=52 \cdot 7+1$ und für Schaltjahre $366=52 \cdot 7+2$

Jahr	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
1. Januar	x SA	x + 1 SO	x + 2 MO	x + 3 DI	x + 5 DO	x + 6 Fr	x + 7 SA

Somit sind die Jahre 2005 und 2011 *äquivalent*.