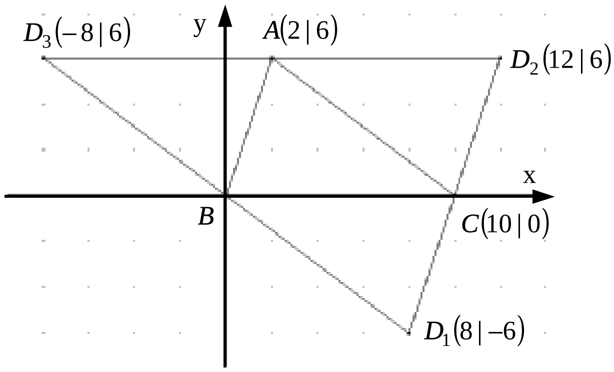
Mathematikwettbewerb 2005 der Jahrgangsstufe 11

Lösungen

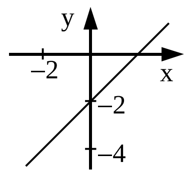
Hinweise zur Bewertung:

- Bei jeder Aufgabe können maximal 12 Punkte erreicht werden, wobei die fünf besten Aufgaben gewertet werden. Es sind also maximal 60 Punkte zu erreichen.
- Für jede Teilaufgabe ist ein Lösungsweg und die zugehörige Punktzahl vorgegeben. Bei anderen bzw. unvollständigen Lösungen sind die Punkte nach eigenem Ermessen zu verteilen, wobei die angegebene Punktzahl für die Teilaufgaben eingehalten werden sollte.

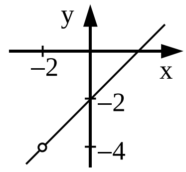
1. a) Alle Parallelogramme haben die gleiche Fläche, da sie doppelt so groß sind wie Dreieck ABC. ***4 P***



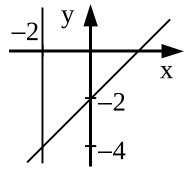
b) (i) ***4 P***



(ii)

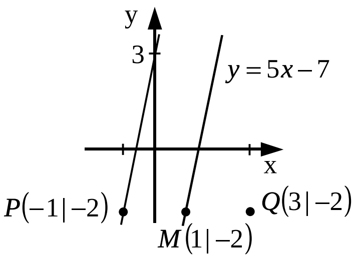


(iii)



Alle drei Punktmengen sind verschieden.

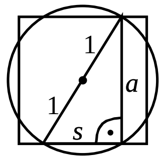
c) Für $P(-1|-2)$ ist $M(1|-2)$. Alle Punkte M liegen auf einer Geraden parallel zu $y=5x+3$, also $y=5x-7$. ***4 P***



2. a) Sei $\alpha = \sphericalangle A$, dann ist $\sphericalangle B = 180° - \alpha$. Also gilt $\sphericalangle ASB = 180° - \dfrac{\alpha}{3} - \dfrac{1}{3}(180° - \alpha) = 120°$. ***4 P***

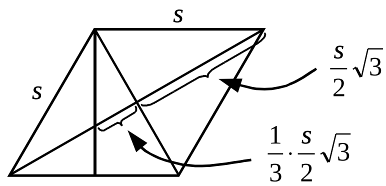
b) Für die Quadratseite a gilt $\pi \cdot 1^2 = a^2$. Für s gilt entweder ***4 P***

$$s=\sqrt{2^2-a^2}=\sqrt{4-\pi} \text{ oder } \left(\frac{s}{2}\right)^2=1^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ d.h. } s=2\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}.$$



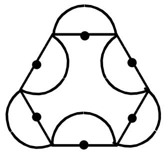
c) Seien a und b die Rechteckseiten. Dann gilt $a\cdot b=6$ und $\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{5}$. Hieraus folgt $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=\left(2\sqrt{5}\right)^2+2\cdot 6=\left(4\sqrt{2}\right)^2$ und für den Umfang $2a+2b=8\sqrt{2}$. ***4 P***

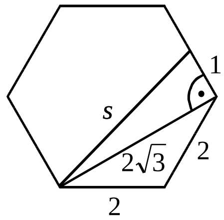
3. a) Seite des kleinen Sechsecks: $2\cdot\frac{1}{3}\frac{s}{2}\sqrt{3}=\frac{s}{\sqrt{3}}$. **4P**



b) Die gesuchte Fläche ist gleich der Fläche des Sechsecks mit Seitenlänge 2, also **4 P**

$6\cdot\frac{2^2}{4}\sqrt{3}=6\cdot\sqrt{3}$.



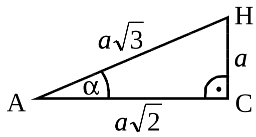


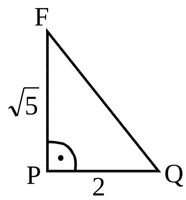
c) $s=\sqrt{1^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{13}$. **4 P**

---

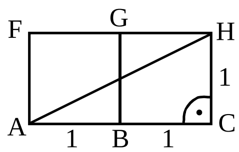
4. a) Ist a die Würfelkante, so gilt $a\sqrt{3}=1$, also $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3 P**

b) $\cos\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ **3 P**





c) Fläche von ΔPQF = $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5}$ **3 P**



d) $AH=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ **3 P**

---

5. a) Die nächsten zwei Palindrome sind 16061 und 16161, Frau Meier ist also 110 km oder 210 km gefahren. **4 P**
Wenn sie in einen Verkehrsstau geraten ist, waren es 55 km/h, sonst 105 km/h.

b) $(a\,|\,b)\rightarrow(a+2b\,|\,2a-b)\rightarrow(5a\,|\,5b)\rightarrow(5a+10b\,|\,10a-5b)\rightarrow(25a\,|\,25b)$.
Nach 2 Schritten verfünffachen sich die Koordinaten, also hat man nach 2005 Schritten den Punkt $\left(5^{1002}a\,|\,5^{1002}b\right)$ erreicht. **4 P**

c) $\frac{1+2+3+...+n}{3n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{3n}=\frac{n+1}{6}=36$ also $n=36\cdot 6-1=215$. **4 P**

---

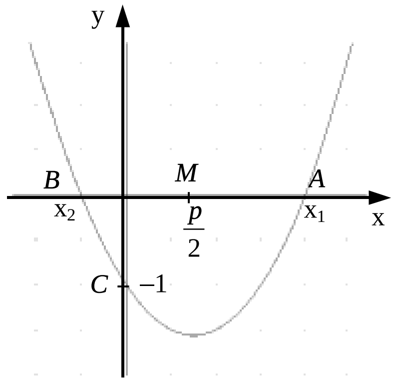
6. a) Aus $f(10)=g(10)$ folgt $1=(10+b)\cdot(10+c)$, also $10+b=10+c=\pm 1$. Somit ist $b=c=-9$ oder -11. Aus $f(0)=g(0)$ folgt $10a+1=b\cdot c$, also $10a+1=81$ oder 121, und somit $a=8$ oder 12. Somit ist $f(x)=g(x)$ für $(a,b,c)=(8,-9,-9)$ oder $(12,-11,-11)$. **4 P**

b) Die Tangente in $P(a\,|\,\frac{1}{a})$ hat die Gleichung $y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$ und schneidet die Achsen in $2a$ und $\frac{2}{a}$, d.h. die Fläche des Dreiecks ABO ist 2, unabhängig von a. **4 P**

c) Es gilt $g(x):=f(x+1)-1=(x+1)^3-3(x+1)^2-2(x+1)+5-1=x^3-5x$. **4 P**
Also ist $g(-x)=-g(x)$.

7. a) Da f nach oben geöffnet ist, muss $a > 0$ sein. Aus $f(x) = f(-x)$ folgt $b = 0$ und $d = 0$. Aus $f(0) < 0$ folgt $e < 0$. Aus $f'(x) = 2x \cdot (2ax^2 + c)$ und den drei Extremalpunkten von f folgt, dass a und c unterschiedliches Vorzeichen haben müssen, also $c < 0$. **4 P**

b) 1. Lsg.: Aus $x_1 \cdot x_2 = -1$ folgt mit dem Höhensatz, dass ΔABC rechtwinklig ist. **4 P**



2. Lsg.: Für die Mitte M von AB gilt

$$MA = MB = MC = \sqrt{1 + \frac{p^2}{4}}\text{, also ist}$$

nach dem Thalessatz $\sphericalangle ACB = 90°$.

3. Lsg.: Wegen $x_{1/2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1}$ ist $x_1 > 0$

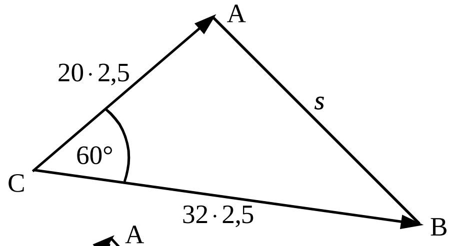
und $x_2 < 0$. Steigung von $AC = \frac{1}{x_1}$, Steigung von $BC = \frac{1}{x_2}$. Wegen $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -1$

folgt $AC \perp BC$.

4. Lsg.: $AC^2 + BC^2 = x_1^{\,2} + 1 + x_2^{\,2} + 1 = 4 + p(x_1 + x_2) = 4 + p^2 = AB^2$.

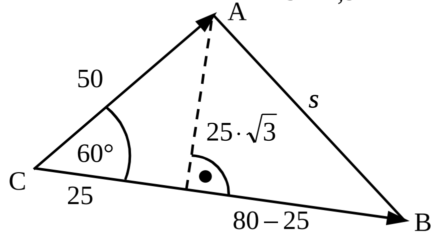
Nach „Pythagoras" folgt $\sphericalangle ACB = 90°$.

c) Sei s die gesuchte Entfernung. **4 P**



1. Lösung (Kosinussatz):
$s^2 = 50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 60° = 70^2$.

2. Lösung:
$s^2 = (25\sqrt{3})^2 + (80 - 25)^2 = 4900 = 70^2$.



8. a) Aus $y = ax \cdot (100 - x) + \frac{b}{(x-40)^2}$ folgt für $x = 60$: $a \cdot 60 \cdot 40 + \frac{b}{20^2} = 4820$ **4 P**

und für $x = 80$: $a \cdot 80 \cdot 20 + \frac{b}{40^2} = 3205$. Hieraus folgt $a = 2$ und $b = 5 \cdot 40^2$.

Aus $y = 2x \cdot (100 - x) + \frac{5 \cdot 40^2}{(x-40)^2}$ folgt für $x = 70$: $y = 2 \cdot 70 \cdot 30 + \frac{5 \cdot 40^2}{30^2} \approx 4209$.

Nach 70 Jahren leben noch ca. 4209.

b) Einkaufspreis: $24 \cdot \left(1 - \frac{12{,}5}{100}\right) = 24 \cdot \frac{7}{8} = 21$ (€); Verkaufspreis: $21 \cdot \left(1 + \frac{33\frac{1}{3}}{100}\right) = 28$ (€) **4 P**

Preisschild: Aus $p - \frac{1}{5}p = 28$ folgt $p = 35$ (€).

c) 10 gelbe, 6 grüne und 1 rotes Gummibärchen reichen noch nicht.
Also muss Thomas 18 Gummibärchen essen. **4 P**

Für Ihre Auswertung (zur Übernahme auf den Rückmeldebogen):

Ergebnisse der Einzelaufgaben:

Aufgabe	Anzahl der Schüler/innen				
	Nicht bearb.	0-3 Pkte	4-6 Pkte	7-9 Pkte	10-12 Pkte
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

Gesamtergebnis:

Erreichte Punktzahl	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60
Anzahl Schüler/innen												

Teilnehmerzahl: .... Durchschnittlich erreichte Punktzahl: ....

Versäumen Sie bitte nicht, uns bis zum **18. März 2005** die Schulsiegerin bzw. den Schulsieger zu melden (Vorname, Nachname, Geschlecht, erreichte Punktzahl); bei **50 oder mehr Punkten** bitte Bearbeitung im **Original** zuschicken.
Die Schulsiegerin bzw. der Schulsieger erhalten, wenn sie mindestens 30 Punkte erreicht haben, eine Urkunde und einen Sachpreis.