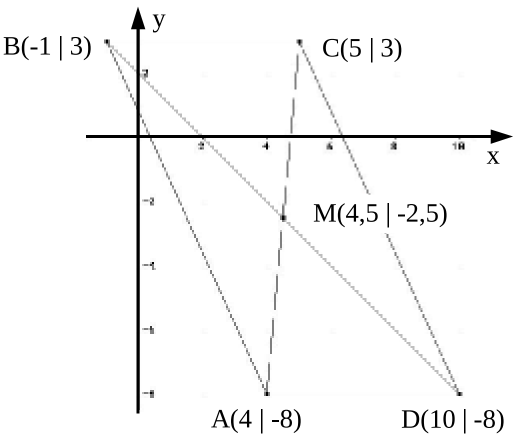
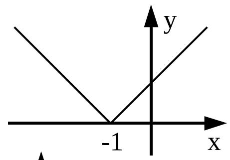
Lösungen zu den Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb 2005 der Jahrgangsstufe 11

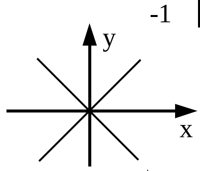
1. a) Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm, weil sich die Diagonalen halbieren.



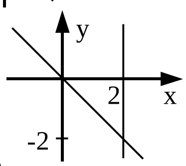
b) (i)



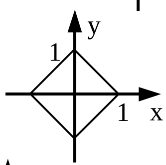
(ii)



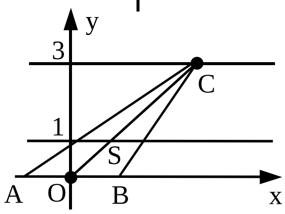
(iii)



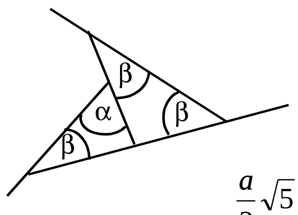
(iv)

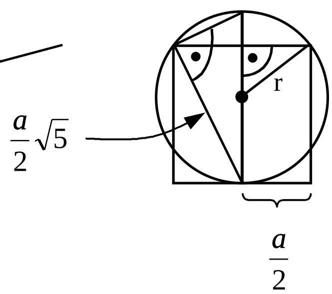


c) Alle Punkte S liegen auf der Geraden $y = 1$, denn OC wird durch S im Verhältnis $1:2$ geteilt.



2. a) Wegen $\beta = 180° - 140° = 40°$ gilt $\alpha = 180° - 3 \cdot \beta = 60°$





b) Mit der Quadratseite a gilt entweder

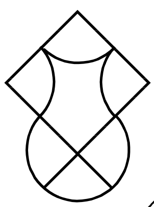
$\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 = 2r \cdot a$ (Kathetensatz) oder

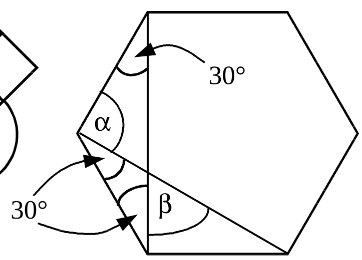
$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = (2r - a) \cdot a$ (Höhensatz) oder

$r^2 - (a-r)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ (Pythagoras). Also $r = \frac{5}{8}a$. Für $a = 2$ ergibt sich $r = \frac{5}{4}$.

c) Seien a und b die Rechteckseiten. Dann gilt $a \cdot b = 3$ und $2a + 2b = 7$. Hieraus folgt für die Diagonale $d = \frac{5}{2}$, denn es gilt $d^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$.

3. a) Sechseckseite = Kreisradius r. Aus $\pi r^2 = 20\pi$ folgt $r = 2\sqrt{5}$ und somit $A = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2 = 30\sqrt{3}$



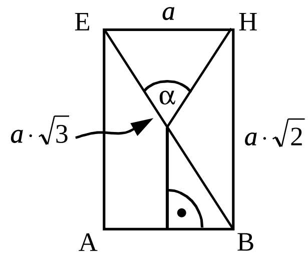


b) Die Fläche ist gleich der Fläche des Quadrats mit Seitenlänge 2, also 4.

c) $\alpha = 120° - 30° = 90°$, $\beta = 30° + 30° = 60°$

4. a) Ist a die Würfelkante, so gilt $a\sqrt{3}=1$, also $a=\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Somit ist die Oberfläche $6a^2=2$ und das Volumen $a^3=\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

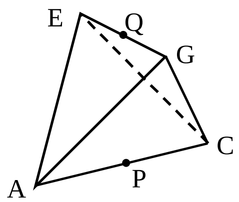
b) Entweder (Kosinussatz) $\cos\alpha=\frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2-a^2}{2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$

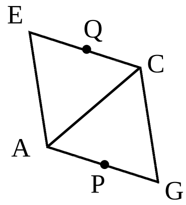


oder $\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$

c) *PCQF* ist eine Raute (Seitenlänge $\sqrt{5}$) mit den Diagonalen $CF=2\sqrt{3}$ und $PQ=2\sqrt{2}$; also ist die Fläche $\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$.

d) $PQ=AE=CG=\sqrt{2}$
(Kantenlänge des Tetraeders)





5. a) Bei 4-stelligen (5-stelligen) Palindromen bilden die ersten zwei (drei) Ziffern eine beliebige 2-stellige (3-stellige) Zahl, also gibt es $90+900=990$ vier- und fünfstellige Palindrome.

b) $a, b, \frac{b}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{a}{b}, a, b, \ldots$. Die Folge ist periodisch mit der Periode 6.
Wegen $2005=6\cdot 334+1$ ist das 2005. Folgenglied a.

c) $\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2\cdot(1+2+3+\ldots+n)} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} = \frac{115}{116}$ also $n=115$.

6. a) Es gilt $f_1(x)=f_2(x)=f_3(x)=f_4(x)$ für alle $0<x<\frac{\pi}{2}$.

b) Die Tangente in $\left(a\,|\,12-a^2\right)$ hat die Gleichung $y=-2ax+a^2+12$ und schneidet die Achsen in $A\left(\frac{a^2+12}{2a}\,|\,0\right)$ und $B\left(0\,|\,a^2+12\right)$.

Somit ist $F(a)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(a^2+12\right)^2}{a}$ mit $F(1)=\frac{169}{4}$ und $F(3)=\frac{147}{4}$.

Aus $F'(a)=\frac{1}{4a^2}\cdot\left(a\cdot 2\cdot\left(a^2+12\right)\cdot 2a-\left(a^2+12\right)^2\right)=\frac{1}{4a^2}\cdot\left(a^2+12\right)\cdot\left(3a^2-12\right)=0$

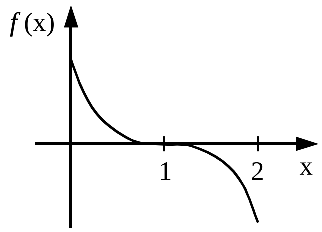
folgt $a=2$ und $F(2)=\frac{128}{4}$.

c) Es gilt $f(x)=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$; Nullstellen 1, 2, -3. $f'(x)=3x^2-7$:

Extremalpunkte $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{3}}\,|\,6\mp\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$. $f''(x)=6x$: Wendepunkt $(0\,|\,6)$.

Für $g(x):=f(x)-6=x^3-7x$ gilt $g(-x)=-g(x)$.

7. a) Extremalpunkte für $x = -2$, 1 und 4.



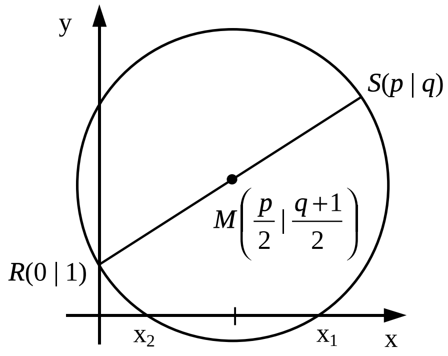
b) Kreismittelpunkt $M\left(\frac{p}{2} \mid \frac{q+1}{2}\right)$,

Kreisradius $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2}$, Kreisgleichung:

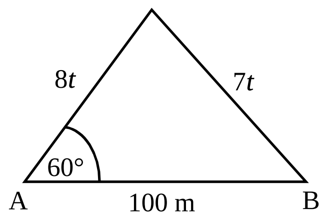
$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q-1}{2}\right)^2$.

Für $y = 0$ folgt hieraus $x^2 - px + q = 0$.
Also schneidet der Kreis die x-Achse in

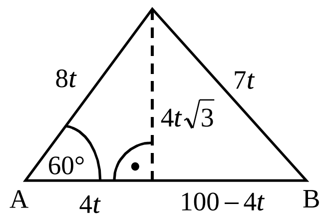
$x_{1/2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.



c) Sei t die Zeit bis zur Begegnung.



1. Lösung (Kosinussatz):
$(7t)^2 = 100^2 + (8t)^2 - 2 \cdot 100 \cdot 8t \cdot \cos 60°$.
Also $0 = 3t^2 - 160t + 2000 = (3t - 100) \cdot (t - 20)$
Somit ist $t = 20$ („möglichst früh“)
und Antons Weg $8 \cdot 20 = 160$ Meter.



2. Lösung:
Aus $(7t)^2 = \left(4t\sqrt{3}\right)^2 + (100 - 4t)^2$ folgt
$3t^2 - 160t + 2000 = 0$, weiter siehe 1. Lösung.

8. a) Für die Anzahl a am Anfang gilt $a \cdot 3^9 = 275562$ also $a = 14$.

b) Sei a der offizielle Großhandelspreis und p der Preis, der an der Ware steht.
Dann gilt $p - \frac{1}{5}p = \left(a \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{4}{3}$ also $p = \frac{5}{4}a$, d.h. p ist 125% von a.

c) Mit 19 roten, einem grünen, einem gelben und einem schwarzen Socken hat man noch keine 10 Paare. Erst mit einer weiteren Socke hat man 10 Paare. Also braucht man 23 Socken.