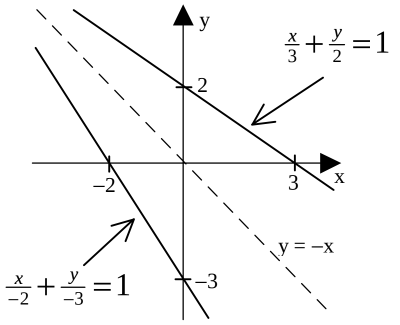
# Lösungen zu den Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb 2003 der Jahrgangsstufe 11

1. a) Aus $a \cdot a + 3 \cdot (-3) = 7$ folgt $a = 4$.

   b) Die gespiegelte Gerade hat die Achsenabschnittsgleichung $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1$, also $y = -\frac{3}{2}x - 3$, d.h. $m = -\frac{3}{2}$ und $b = -3$.

   c) Aus $\frac{3-m}{m-1} = m$ folgt $m = \sqrt{3}$.




2. a) $\left(\sqrt[6]{27} - \sqrt{6+\frac{3}{4}}\right)^2 = \left(\left(3^3\right)^{\frac{1}{6}} - \left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

   b) $(2*0)*(0*1) = \left(2^2+3^0\right)*\left(0^2+3^1\right) = 5*3 = 5^2+3^3 = 25+27 = 52$

   c) Aus $\log_7(\log_3(\log_2(x))) = 0$ folgt $\log_3(\log_2(x)) = 7^0 = 1$ und somit $\log_2(x) = 3^1 = 3$, also $x = 2^3 = 8$.

   d) $90 \cdot \frac{19}{100} - 19 \cdot \frac{90}{100} = 0$.

3. a) Es gilt $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$, also steht an der 100. Stelle die 10. ungerade Zahl, d.h. 19.

   b) $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$

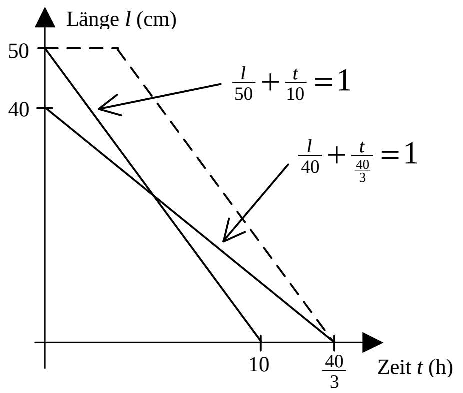
   c) $5 \cdot 3 + 1 = 16$

4. a) (i) Aus $\frac{l}{50} + \frac{t}{10} = 1$ und $\frac{l}{40} + \frac{t}{\frac{40}{3}} = 1$ folgt $t = 5h$.

   (ii) $\frac{40}{3} - 10 = \frac{10}{3}$, d.h. 3 h 20 min später.

   b) Aus $(1-0{,}03)^n \le 0{,}01$ folgt $n \ge \frac{\log 0{,}01}{\log 0{,}97} \approx 151{,}19$; also muss man 152 mal pumpen.

   c) Es sei $x$ die Punktzahl im zweiten Test. Aus $84 = \frac{1}{3} \cdot (90 + x + x + 4)$ folgt $x = 79$.



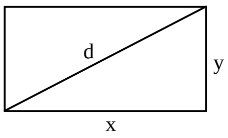

5. a) Aus $x \cdot \left(1 + \frac{y}{100}\right) = 12$ und $x \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right) = 8$ folgt $x = 10$ und $y = 20$.

   b) (i) 16%, denn $0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.

   (ii) Man braucht 5 Filter:

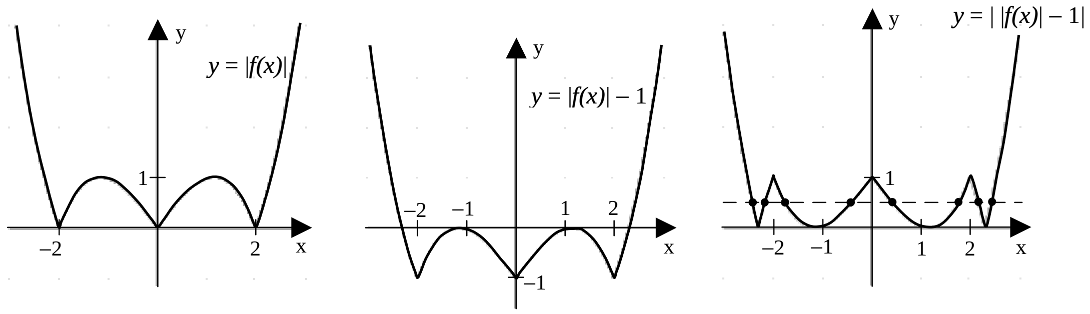
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $0{,}4^n$ | 0,4 | 0,16 | 0,064 | 0,025 | 0,01024 ≈ 1% |

   c) 1% von 1000 g sind 10 g Trockenmasse, nach der Austrocknung sind dies 2%, also wiegen die Erdbeeren nun 500 g.

6. a) 


Es gilt $2x + 2y = 20$,
also $d^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (10 - x)^2 = 2(x-5)^2 + 50$.
Somit ist d minimal für $x = 5$,
d.h. das Rechteck muss ein Quadrat sein.

b) Aus $y = -x^2 + bx - 8 = \frac{b^2}{4} - 8 - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$ folgt $\frac{b^2}{4} - 8 = 0$, d.h. $b = \pm 4\sqrt{2}$.

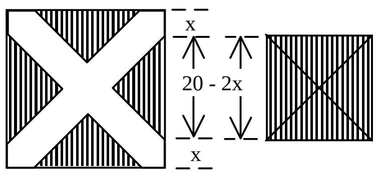
c) 


Es gibt 8 Lösungen.

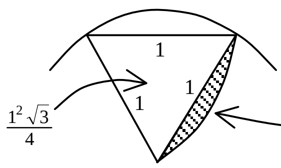
---

7. a) $2c^2 = a^2 + b^2$

b) Aus $(20 - 2x)^2 = \frac{1}{2} 20^2$ folgt $x = 10 - \frac{10}{\sqrt{2}}$.
Streifenbreite $x\sqrt{2} = 10\left(\sqrt{2} - 1\right)$.




c) Berechnung eines halben Rosettenblattes als Differenz zwischen einem Sechstelkreis und einem gleichseitigen Dreieck:




$12 \cdot \underbrace{\left(\frac{\pi 1^2}{6} - \frac{1^2}{4}\sqrt{3}\right)}_{} = 2\pi - 3\sqrt{3}$

---

8. a) (i) Eine schwarze Fläche haben $6(n-2)^2$ Würfel.
Keine schwarze Fläche haben $(n-2)^3$ Würfel.

(ii) Aus $6(n-2)^2 = (n-2)^3$ folgt (wegen $n > 2$) $6 = n - 2$, also $n = 8$.

b) (i) Es gibt $2 \cdot 5$ zusammengeklebte Flächen, also ist die Oberfläche
$6 \cdot 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 5 \cdot 1^2 = 26$.

(ii) Für den Abstand gilt $\sqrt{3^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{22}$.

---