

Mathematikwettbewerb 2002 der Jahrgangsstufe 11

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1.
 - a) Zeichnen Sie die Gerade $g : 5x + 12y = 60$ im x - y -Koordinatensystem mit Ursprung O . Bestimmen Sie die Schnittpunkte A und B von g mit der x - bzw. y -Achse.
 - b) Berechnen Sie Fläche und Umfang des Dreiecks ABO .
 - c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes M , der von A , B und O gleich weit entfernt ist.
 - d) Wie muss ein Punkt P auf g gewählt werden, so dass OP die Fläche des Dreiecks halbiert?
 - e) Berechnen Sie die Koordinaten derjenigen Punkte auf g , die zur x - und zur y -Achse den gleichen Abstand haben.

2.
 - a) Ein Auto fährt auf der Autobahn drei Stunden lang mit einer konstanten Geschwindigkeit von 120 km/h und zwei weitere Stunden mit Tempo 90 km/h. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen Zeit und Geschwindigkeit graphisch dar. Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der Zeitachse. Welche Bedeutung hat diese Fläche?
 - b) Biologen haben herausgefunden, dass das Zirpen bei Grillen abhängig von der Temperatur ist, und zwar ist die Beziehung annähernd linear: Bei 20°C zirpen Grillen 124 mal pro Minute, bei 27°C sind 173 Zirplaute in der Minute zu hören.
 - i) Welcher lineare Zusammenhang besteht zwischen der Temperatur ϑ und der Anzahl z des Zirpens pro Minute?
 - ii) Wenn man eine Grille in 15 Sekunden 38 mal zirpen hört, wie warm wird es dann sein?
 - iii) Wie oft pro Minute wird eine Grille bei 30°C zirpen?

3.
 - a) Bei einem Dreieck wird die Grundseite um 10% verkürzt und die Höhe um 10% verlängert. Um wie viel Prozent verändert sich die Fläche?
 - b) Der Radius eines Kreises wird verdoppelt. Um wie viel Prozent vergrößern sich dabei die Fläche und der Umfang des Kreises?
 - c) Ein Auto, das 9000 € wert ist, wird von Herrn Albert mit 10% Verlust an Herrn Benz verkauft. Herr Benz verkauft das Auto mit 10% Gewinn wieder an Herrn Albert. Wie viel Euro Verlust hat Herr Albert bei dieser Verkauf- und Rückkaufaktion gemacht?
 - d) Für Fundgegenstände gibt es einen gestaffelten Finderlohn: Bis 500 € erhält man 5 % des Wertes, für den Anteil über 500 € erhält man nur noch 3 %. Sabine erhält für eine gefundene Brosche insgesamt 4 % des Wertes der Brosche als gesetzlichen Finderlohn. Welchen Wert hat die Brosche ?

4.
 - a) Auf einem Empfang stößt jeder mit jedem an. Man hört 21 mal Gläser klingen. Wie viele Personen waren beim Empfang anwesend?
 - b) Auf einer Party sind 13 Ehepaare anwesend. Jeder Mann begrüßt alle Anwesenden außer seiner Ehefrau mit Handschlag. Zwischen den Ehefrauen fand keine Händeschütteln statt. Wie viele Handschläge gab es insgesamt?
 - c) Wie viele „Wörter“ lassen sich aus den Buchstaben P, R, O, B, L, E, M bilden. Wie viele dieser „Wörter“ beginnen mit R oder enden auf E?



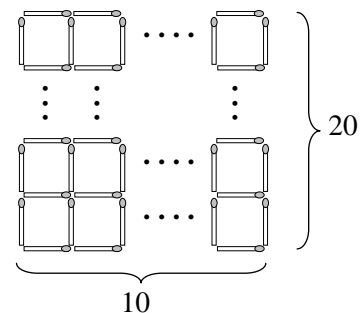
5. a) Ordnet man jedem Punkt $(x | y)$ des Koordinatensystems den Punkt $(-x | -y)$ zu:
 $(x | y) \rightarrow (-x | -y)$,
 so ist diese Abbildung eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung (180° -Drehung).
 Welche geometrischen Deutungen haben die folgenden Abbildungen?

- i) $(x | y) \rightarrow (-y | -x)$
 ii) $(x | y) \rightarrow (-y | x)$

Zeichnen Sie für die gegebenen Abbildungen jeweils das Bild des Dreiecks mit den Ecken $(0 | 0)$, $(1 | 0)$ und $(1 | 1)$.

- b) Skizzieren Sie im x - y -Koordinatensystem den Graphen G der Funktion $y = \log_{10} x$.
 Dreht man G um 90° im Gegenuhrzeigersinn um den Koordinatenursprung, so erhält man den Graphen G' einer Funktion $y = f(x)$.
 Skizzieren Sie G' und bestimmen Sie $f(x)$.

6. a) Mit Streichhölzern wurde das abgebildete Gitter gebildet, das 20 Streichhölzer hoch und 10 Streichhölzer breit ist. Bestimmen Sie die Anzahl der dabei verwendeten Hölzer.



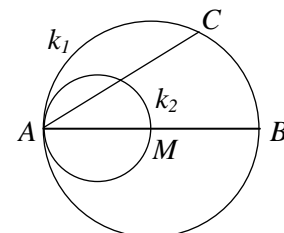
- b)

6	14
?	35


 Ein großes Rechteck wird durch zwei Strecken, die parallel zu seinen Seiten verlaufen, in vier kleinere Rechtecke zerlegt.

Die Flächeninhalte von drei dieser Rechtecke sind 6, 14 bzw. 35. Bestimmen Sie die Fläche des vierten Rechtecks.

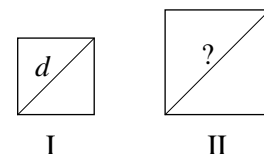
- c) Gegeben ist eine Strecke AB mit Mittelpunkt M sowie die Kreise k_1 und k_2 mit den Durchmessern AB bzw. AM . (vgl. Abb.).



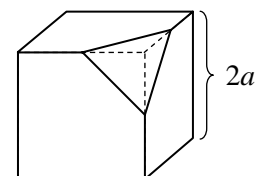
Zeigen Sie: Für jeden beliebigen Punkt C auf k_1 wird die Sehne AC durch k_2 halbiert.

7. a)  Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge s . Der Inkreis dieses Dreiecks ist der Umkreis eines Quadrates. Berechnen Sie die Fläche dieses Quadrates in Abhängigkeit von s .

- b) Gegeben sind zwei Quadrate I und II. Die Fläche von II ist doppelt so groß wie die Fläche von I. Die Diagonale von I sei d . Bestimmen Sie die Länge der Diagonalen von II in Abhängigkeit von d .



8. Gegeben ist ein massiver Würfel mit der Kantenlänge $2a$. An jeder Ecke bilden die Mittelpunkte der drei Kanten, die von der Ecke ausgehen, zusammen mit der Ecke ein Tetraeder. Schneidet man alle acht Tetraeder vom Würfel ab, so entsteht ein Körper, der durch Quadrate und gleichseitige Dreiecke begrenzt ist, ein sog. Kuboktaeder.



Berechnen Sie Kantenlänge, Oberfläche und Volumen des Kuboktaeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge $2a$ des Würfels.