

Tag der Mathematik 2015

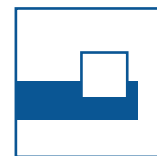
Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

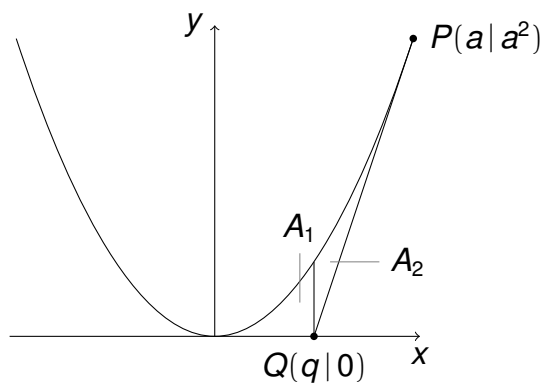
Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!

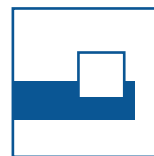


Aufgabe G1

Im x - y -Koordinatensystem sei $P(a | a^2)$, $a > 0$, ein Punkt der Parabel $y = x^2$. Die Tangente in P schneide die x -Achse in $Q(q | 0)$. Die Fläche zwischen der Parabel, der x -Achse und der Tangente wird durch $x = q$ in zwei Teilflächen A_1 und A_2 unterteilt.

Zeigen Sie $A_1 = A_2$.



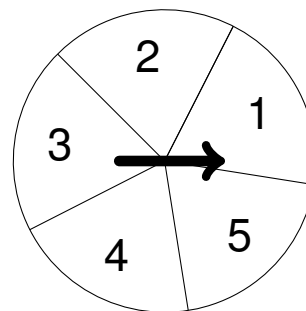


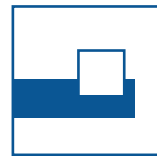
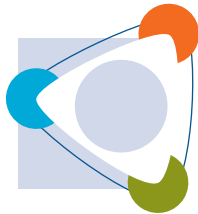
Aufgabe G2

Die Klasse 10 hat zum Schulfest ein Glücksrad gebaut um die Klassenkasse aufzufüllen. Der Spieler zahlt 1€ Einsatz und darf das Rad 3-mal drehen. Für jede 1 erhält er 1€.

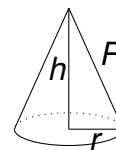
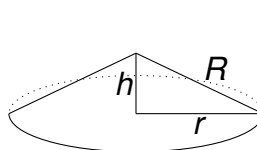
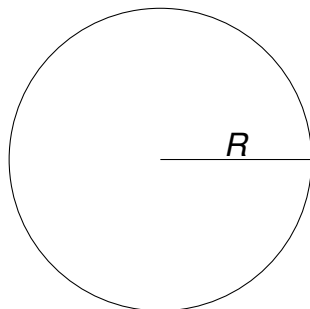
- Welchen Gewinn (Auszahlung – Einsatz) darf die Klasse pro Spiel erwarten?
- Die Auszahlung für 3 Einsen soll erhöht werden, dass das Spiel fair ist, das heißt der Gewinn soll Null sein.

Wie viel müsste für 3 Einsen ausgezahlt werden?



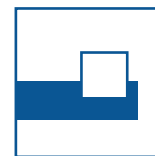


Aufgabe G3



Ein kreisförmiges Papier wird längs eines Radius R aufgeschnitten. Daraus lassen sich dann Kegelmäntel mit unterschiedlichen Grundflächen und Höhen bilden. Seien V das Volumen, h die Höhe und r der Radius des Kegels.

- Bestimmen Sie $V(h)$.
- Wie müssen h und r gewählt werden, damit der Kegel maximales Volumen hat? Berechnen Sie für diesen Fall $\frac{r}{h}$.



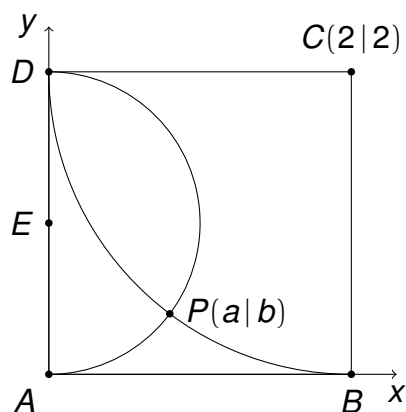
Aufgabe G4

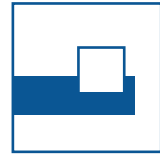
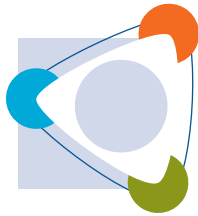
Ein Quadrat $ABCD$ im x - y -Koordinatensystem hat die Ecken $A(0|0)$, $B(2|0)$, $C(2|2)$ und $D(0|2)$.

Sei $P(a|b)$ der Schnittpunkt des Viertelkreises um C durch B und des Halbkreises über AD mit dem Mittelpunkt $E(0|1)$.

Zeigen Sie:

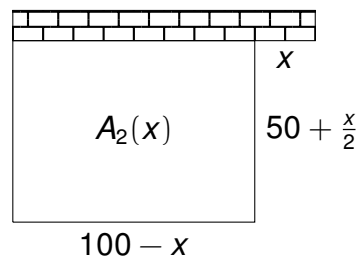
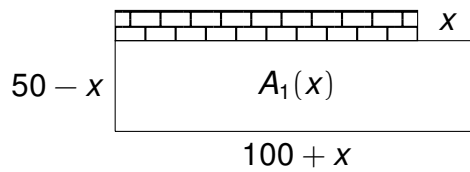
$$\frac{PB}{PA} = \sqrt{2}.$$

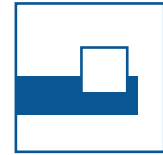
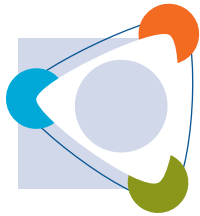




Aufgabe E1

Auf einer Wiese mit einer 100 m langen Steinmauer will Bauer Alfred mit 200 m Maschendraht eine rechteckige Weide einzäunen. Wie muss der Bauer – unter ganzer oder teilweiser Einbeziehung der Mauer – den Zaun errichten, damit eine möglichst große Weide zur Verfügung steht.





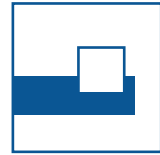
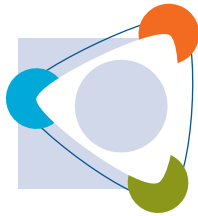
Aufgabe E2

In einer Keramikfabrik werden Fliesen als unbrauchbar ausgesondert, wenn sie sowohl einen Form- als auch einen Farbfehler aufweisen. Fliesen, die ausschließlich einen Farbfehler haben, können noch als 2. Wahl im Verkauf angeboten werden. (Farb- und Formfehler treten im Produktionsprozess unabhängig voneinander auf.)

Durchschnittlich sind 5% der Fliesen wegen Farb- und Formfehler unbrauchbar, während 20% als 2. Wahl verkauft werden.

Wie viel Prozent der hergestellten Fliesen haben einen

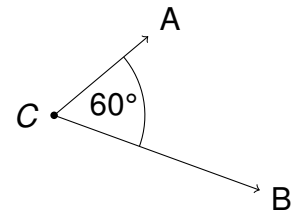
- a) Farbfehler,
- b) Formfehler?

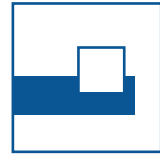
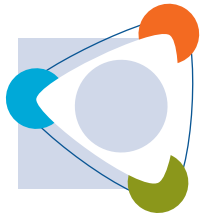


Aufgabe E3

Zwei Schiffe A und B verlassen gleichzeitig den Hafen C mit den konstanten Geschwindigkeiten von 20 km/h bzw. 32 km/h. Der Winkel zwischen den Fahrtrouten beträgt 60° .

Wie weit sind die Schiffe nach 2,5 Stunden voneinander entfernt?

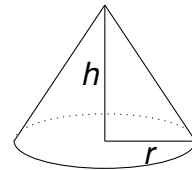
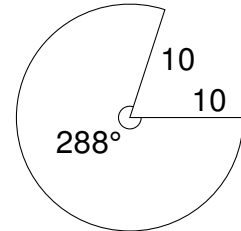


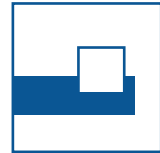
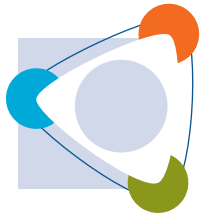


Aufgabe E4

Aus einem Kreisausschnitt mit dem Radius 10 und dem Mittelpunktswinkel von 288° kann durch aneinander legen der geraden Teile ein Kegel gebildet werden.

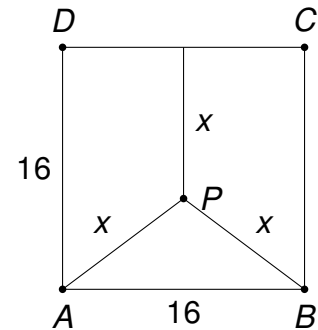
Berechnen Sie den Radius r , die Höhe h sowie das Volumen V des Kegels.

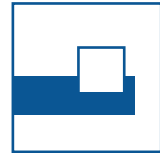
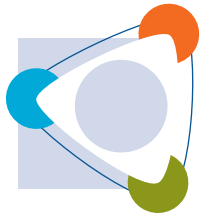




Aufgabe H1

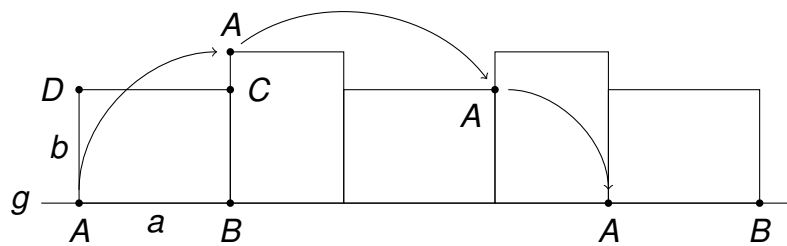
In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 16 hat ein Punkt P von A , B und dem Mittelpunkt von CD den gleichen Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand.



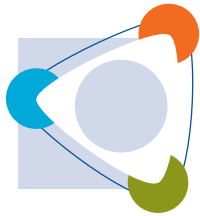


Aufgabe H2

Ein Rechteck $ABCD$ mit $a = 4$ und $b = 3$ liegt mit der Seite AB auf einer Geraden g . Dann wird das Rechteck auf g so lange abgerollt, bis AB wieder auf g liegt.



Wie lang ist der Weg, den A beim Abrollen zurücklegt?



Aufgabe H3

Opa Alfred sagte an seinem Geburtstag:

„Heute bin ich in einem Zahlensystem (100) und in einem anderen (1000) Jahre alt geworden.“

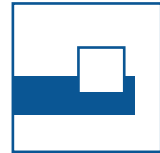
Wie alt ist er geworden?

Hinweis: Zum Beispiel bedeutet (101) im Fünfersystem

$$(101)_5 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 26$$

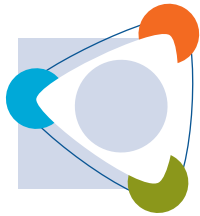
im Zehnersystem. Im Zweiersystem gilt

$$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11.$$



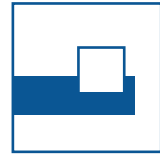
Aufgabe H4

In einem kugelförmigen Aquarium mit einem Radius von 18 cm ist das Wasser an der tiefsten Stelle 26 cm tief. Wie groß ist die Wasseroberfläche?



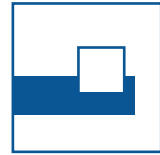
Tag der Mathematik 2015

Aufgabe H5



Aufgabe H5

Welches ist die letzte Ziffer von 3^{2015} ?

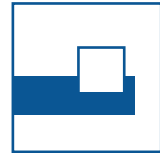
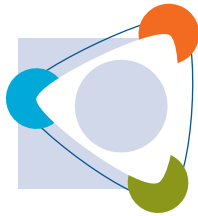


Aufgabe H6

Palindrome sind natürliche Zahlen, die von vorn und von hinten gelesen gleich sind. Zum Beispiel sind 1331 ein vierstelliges und 46964 ein 5-stelliges Palindrom.

Wie viele Palindrome gibt es mit

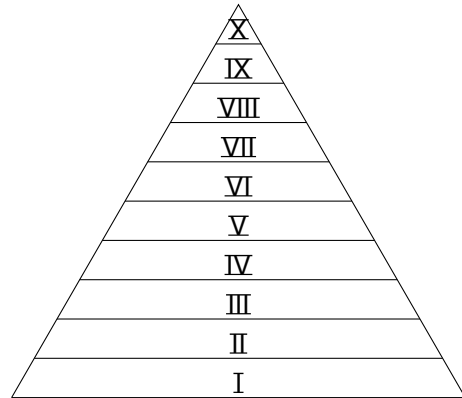
- a) 4 Stellen,
- b) 5 Stellen?

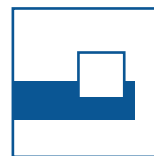


Aufgabe H7

Eine Zielscheibe in Form eines gleichseitigen Dreiecks ist durch 9 äquidistante parallele Linien in 10 Sektoren (I bis X) unterteilt.

Berechnen Sie die Einzelwahrscheinlichkeit, mit der jeweils die Bereiche X, VIII und IV getroffen werden, und zwar unter der Annahme, dass die Zielscheibe immer und jeder Punkt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit getroffen wird.





Aufgabe H8

Gegeben sei das gleichseitige Dreieck ABC . Das Dreieck DEF entsteht dadurch, dass A an B , B an C und C an A gespiegelt wird.

In welchem Verhältnis stehen die Flächen der Dreiecke DEF und ABC ?

