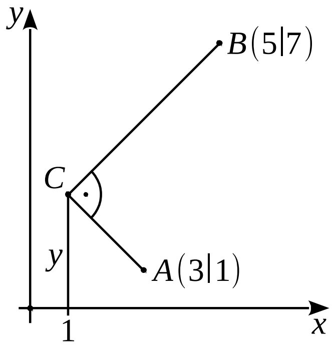
MW-E
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. Ein Dreieck ABC habe die Ecken $A(3|1)$, $B(5|7)$ und $C(1|y)$.
   Finden Sie alle y so, dass der Winkel bei C ein rechter Winkel ist.



2. Wählen Sie eine dreistellige Zahl.
   Vertauschen Sie Einerziffer und Hunderterziffer.
   Ziehen Sie die kleinere von der größeren Zahl ab.
   Zum Beispiel: 267 und 672 : $672 - 276 = 396$
   132 und 231 : $231 - 132 = 99$

   a) Welchen größten gemeinsamen Teiler haben 396 und 99?
   Gilt dies auch für andere dreistellige Zahlen?
   Überprüfen Sie Ihre Vermutung an drei weiteren Zahlen.

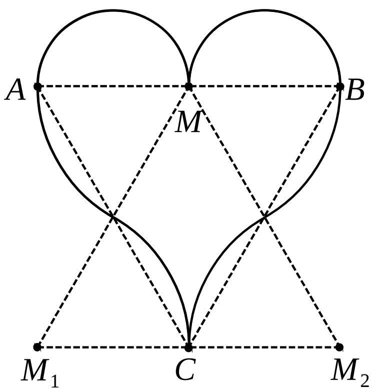
   b) Beweisen Sie Ihre Vermutung für eine beliebige dreistellige Zahl abc, $a \geq c$.

3. Das Herz in der Abbildung besteht aus zwei Halbkreisen über AM und BM, zwei Kreisbögen um M und zwei Kreisbögen um M_1 und M_2.
   Die Dreiecke ABC und $M_1 M_2 M$ sind gleichseitig mit $AB = M_1M_2 = 2a$.

   Berechnen Sie für das Herz

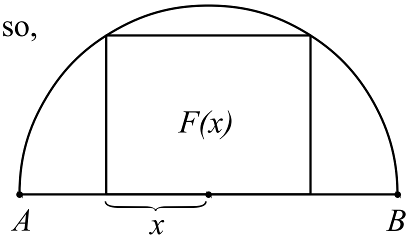
   a) den Umfang U,

   b) die Fläche F.

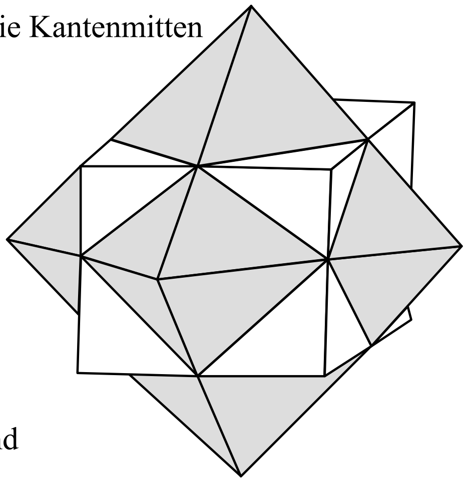


4. In einem Halbkreis über AB mit Radius 1 liegt ein Rechteck so, dass zwei Ecken auf AB liegen und die beiden anderen auf dem Halbkreis.

   Wie muss die halbe Rechteckseite x gewählt werden, damit die Rechteckfläche $F(x)$ möglichst groß wird?



5. Ein Würfel und ein Oktaeder durchdringen sich so, dass die Kantenmitten zusammenfallen (siehe Abbildung).



   a) Der Würfel habe die Kantenlänge a.
      Welche Kantenlänge s hat das Oktaeder?

   b) Welche Oberfläche O hat das Oktaeder?

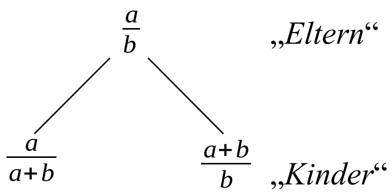
   c) Welche Oberfläche hat die Vereinigung von Würfel und Oktaeder, d. h. die Fläche aller sichtbaren Dreiecke?

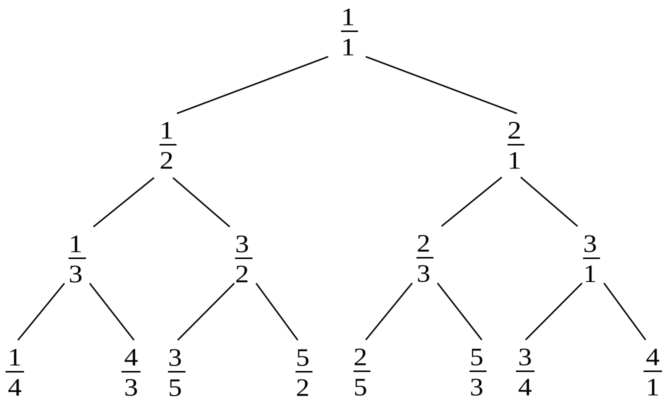
6. a) Zeichnen Sie im 1. Quadranten die beiden Parabeln $y = x^2$ und $y^2 = 2x$.
      Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $P(a|b)$.

   b) Zeichnen Sie im x,y-Koordinatensystem die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \text{ und für } x > 3 \\ 1-|2x-5| & \text{für } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

7. Die Konstruktion des Baumdiagramms erfolgt nach der Regel





Jeder Bruch hat zwei *Kinder*. Das linke *Kind* ist ein Bruch kleiner 1, das rechte größer 1. Zum Beispiel haben die *Kinder* $\frac{2}{5}$ und $\frac{5}{2}$ die *Eltern* $\frac{3}{2}$.

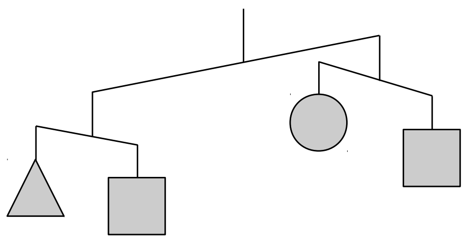
a) Berechnen Sie die 16 Brüche in der nächsten Reihe.

b) Welche *Kinder* hat $\frac{1}{5}$?

c) Welche *Eltern* hat $\frac{7}{13}$?

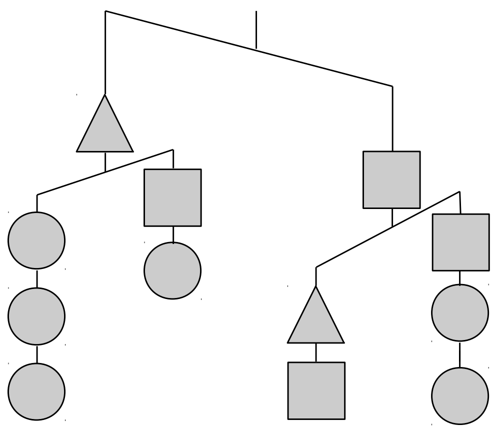
d) Welches sind die *Großeltern* von $\frac{7}{13}$?

8. Das abgebildete Mobile ist nicht im Gleichgewicht, da Kreis, Quadrat und Dreieck unterschiedliche Gewichte sind.



Aus △ < □ (links),
○ < □ (rechts) und
○ + □ < △ + □ (insgesamt)
folgt ○ < △ < □.

Welche Ungleichung für die unterschiedlich geformten Gewichte folgt aus dem abgebildeten Mobile?



Lösungen zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2015

1. 1. Lösung:

Die Steigungen von AC und BC sind $-\frac{y-1}{2}$ bzw. $\frac{7-y}{4}$.

Wegen $AC \perp BC$ gilt $-\frac{y-1}{2} \cdot \frac{7-y}{4} = -1$.

Aus $(y-1)(7-y) = 8$ folgt $y^2 - 8y + 15 = 0$ und somit

$0 = y^2 - 8y + 15 = (y-3)(y-5)$,

also $y = 3$ oder $y = 5$. 12P.

2. Lösung:

Es gilt $AB^2 = (5-3)^2 + (7-1)^2 = 40$ und

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2^2 + (y-1)^2 + 4^2 + (7-y)^2 = 2y^2 - 16y + 70.$$

Aus $2y^2 - 16y + 70 = 40$ folgt $0 = y^2 - 8y + 15 = (y-3)(y-5)$

und somit $y = 3$ oder $y = 5$.

---

2. a) $981 - 189 = 792 = 8 \cdot 99$
$693 - 396 = 297 = 3 \cdot 99$
$801 - 108 = 693 = 7 \cdot 99$ 6P.

Vermutung: Die Differenz ist immer durch 99 teilbar.

b) $abc - cba = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99 \cdot (a - c)$. 6P.

---

3. a) $U = \pi a + 4 \cdot \frac{\pi \cdot 2a}{6} = \frac{7}{3}\pi a$ 6P.

b) $F = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{(2a)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = a^2\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ 6P.

4. <u>1. Lösung:</u>

$F(x) = 2x\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}$.

$F(x)$ wird maximal für $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

<u>2. Lösung:</u> <u>12P.</u>

$F(x) = 2x\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{x^2-x^4}$.

Aus $F'(x) = \frac{2x(1-2x^2)}{\sqrt{x^2-x^4}} = 0$ folgt $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Da $F(0) = F(1) = 0$ und $F(x) > 0$ für $0 < x < 1$, ist $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ein Maximum.

---

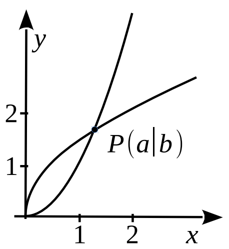
5. a) Die Kantenlänge des Oktaeders ist $s = a\sqrt{2}$. <u>4P.</u>

b) Die Oberfläche besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge s. <u>4P.</u>
Also ist $O = 8\cdot\frac{s^2}{4}\sqrt{3} = 4a^2\sqrt{3}$.

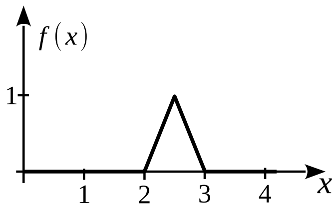
c) Die Oberfläche besteht aus $6\cdot 4$ gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge $\frac{a}{\sqrt{2}}$
und $8\cdot 3$ gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecken mit Kathetenlänge $\frac{a}{2}$. <u>4P.</u>
Also ist die gesamte Oberfläche $24\cdot\left(\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) = 3a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.

---

6. a) Aus $b^2 = 2a$ und $b = a^2$
folgt $a^3 = 2$ und $b^3 = 4$,
also $P\left(\sqrt[3]{2}\middle|\sqrt[3]{4}\right)$.
Die gesuchte Kantenlänge ist $\sqrt[3]{2}$. <u>6P.</u>



b) Für $2 < x \le 2{,}5$ ist $f(x) = 1+(2x-5) = 2x-4$.
Für $2{,}5 < x < 3$ ist $f(x) = 1-(2x-5) = -2x+6$. <u>6P.</u>



7. a)

$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{1}$
$\frac{1}{5}$ $\frac{5}{4}$	$\frac{4}{7}$ $\frac{7}{3}$	$\frac{3}{8}$ $\frac{8}{5}$	$\frac{5}{7}$ $\frac{7}{2}$	$\frac{2}{7}$ $\frac{7}{5}$	$\frac{5}{8}$ $\frac{8}{3}$	$\frac{3}{7}$ $\frac{7}{4}$	$\frac{4}{5}$ $\frac{5}{1}$

3P.

b) $\frac{1}{6}$ und $\frac{6}{5}$ 3P.

c) Aus $\frac{7}{13} = \frac{a}{a+b}$ folgen die *Eltern* $\frac{a}{b} = \frac{7}{6}$. 3P.

d) Aus $\frac{7}{6} = \frac{a+b}{b}$ folgen die *Eltern* $\frac{a}{b} = \frac{1}{6}$.

Also hat $\frac{7}{13}$ die *Großeltern* $\frac{1}{6}$. 3P.

---

8. Aus □ + ○ < 3 ○ (links) folgt □ < 2 ○

Aus 2 ○ + □ < △ + □ (rechts) folgt 2 ○ < △

Aus 4 ○ + □ + △ < 3 □ + 2 ○ + △ (insgesamt)

folgt ○ < □

Also ○ < □ < △

12P.