MW-E
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. Gegeben sind die drei Geraden
   $g_1: \; y = x+1,$
   $g_2: \; y = mx-1,$
   $g_3: \; y = -17x+m.$
   Für welche m gehen die Geraden durch einen Punkt?
   Welche Koordinaten haben die Schnittpunkte?

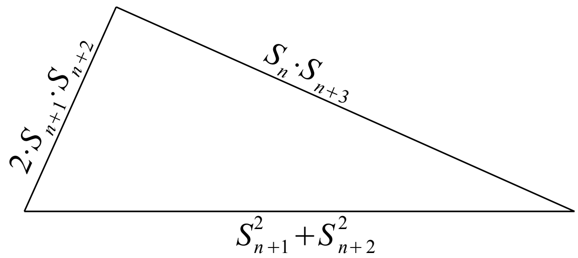
---

2. Gegeben ist die rekursiv definierte Folge $S_1, S_2, S_3, \cdots$ mit
   $S_1 = S_2 = 1, \; S_{n+1} = S_n + S_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \cdots$

   a) Berechnen Sie S_n für $n = 3, 4, \cdots, 8.$

   b) Berechnen Sie $S_n^2 - S_{n-1} \cdot S_{n+1}$ für $n = 2, 3, 4, 5.$
   Welche Gesetzmäßigkeit kann man vermuten?

   c) Berechnen Sie für $n = 1, 2, 3$ die Zahlen
   $a := S_n \cdot S_{n+3}$
   $b := 2 \cdot S_{n+1} \cdot S_{n+2}$
   $c := S_{n+1}^2 + S_{n+2}^2$

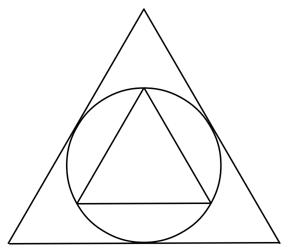


   Welche Eigenschaft haben die Dreiecke mit den Seiten a, b, c?

---

3. a) Zwei gleichseitige Dreiecke sind einem Kreis um- und einbeschrieben.

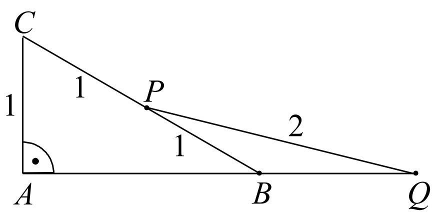
   Wenn das kleinere Dreieck eine Fläche von 3 cm² hat, wie groß ist dann die Fläche des größeren Dreiecks?



   b) Die Strecken BC und PQ haben die Länge 2.
   P ist der Mittelpunkt von BC.

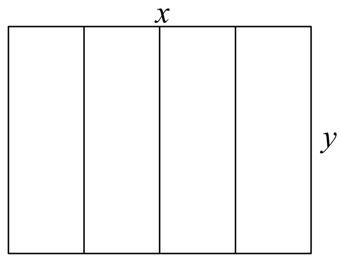
   AC hat die Länge 1 und steht senkrecht auf AB.

   Berechnen Sie das Verhältnis $\dfrac{AQ}{AB}$.



4. Ein Zoo hat 60 m Maschendraht, um vier benachbarte, rechteckige, gleich große Gehege einzuzäunen.

   Wie muss die Gesamtlänge x und die Breite y gewählt werden, damit die umzäunte Fläche möglichst groß wird?

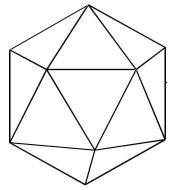


5. a) Einer Kugel wird ein Würfel einbeschrieben (die Ecken liegen auf der Kugel) und ein Würfel umbeschrieben (die Seiten berühren die Kugel).

   Wenn der äußere Würfel eine Oberfläche von 24 cm² hat, wie groß ist dann die Oberfläche des kleineren Würfels?

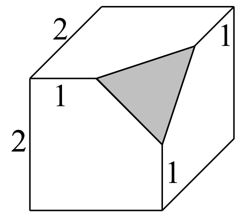
   b) Ein Ikosaeder wird durch 20 gleichseitige Dreiecke begrenzt. Ein Ikosaederstern entsteht dadurch, dass man auf jeder Fläche eine dreiseitige Pyramide errichtet.

   Wie viele Kanten hat ein Ikosaederstern?



   c) Bei einem hohlen Würfel wird eine Ecke so abgeschnitten, dass ein dreieckiges Loch entsteht. Der Schnitt geht durch die Mitten von drei benachbarten Kanten (siehe Abb.).

   Wie groß ist die Fläche des restlichen Körpers?



6. a) Zeichnen Sie die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2 + x$ für $-4 \leq x \leq 2$.

   b) Wie muss bei der Geraden $y = 3x + b$ der Achsenabschnitt b gewählt werden, damit die Gerade die Parabel in zwei verschiedenen Punkten P und Q schneidet?

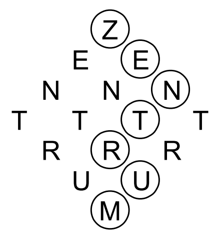
   c) Berechnen Sie die x-Koordinaten von P und Q in Abhängigkeit von b. Wo liegen die Mittelpunkte von PQ ?

7. a) Wie viele dreistellige Zahlen bestehen aus drei verschiedenen Ziffern?

   b) Max und Moritz vereinbaren ein Glücksspiel mit zwei Würfeln. Max gewinnt, wenn mindestens eine 5 oder eine 6 erscheint. Welches ist die Gewinnwahrscheinlichkeit von Max?

   c) Wie oft kann man in dem Buchstabenschema das Wort Z E N T R U M zusammenhängend lesen?

   Ein mögliches Wort ist markiert.



8. a) Das mittlere Gewicht von 6 Jungen ist 70 kg.
Das durchschnittliche Gewicht von 5 Mädchen ist 48 kg.

Welches ist das Durchschnittsgewicht der 11 Kinder?

b) Lena geht eine aufwärts fahrende Rolltreppe in 15 sek hoch.
Als die Rolltreppe defekt war und sich nicht bewegte, brauchte sie 20 sek, um auf der Treppe nach oben zu steigen.

Wie viele Sekunden braucht sie nach oben, wenn sie auf der fahrenden Rolltreppe stehen bleibt?

c) Jede Seite eines Quadrates wird um 50 % verlängert.

Um wie viel Prozent vergrößert sich die Fläche?

Lösungen zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2013

1. Aus g_1 und g_2 folgt $x(m-1) = 2$.
Aus g_1 und g_3 folgt $18x = m-1$.
Also $\frac{m-1}{18}(m-1) = 2$ und somit $0 = (m-1)^2 - 36 = (m-7)(m+5)$.
Für $m = 7$ ist der Schnittpunkt $\left(\frac{1}{3} \middle| \frac{4}{3}\right)$.
Für $m = -5$ ist der Schnittpunkt $\left(-\frac{1}{3} \middle| \frac{2}{3}\right)$.

12P.

2. a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 — 4P.

b)

n	2	3	4	5
$S_n^2 - S_{n-1} \cdot S_{n+1}$	-1	1	-1	1

Vermutung: $S_n^2 - S_{n-1} \cdot S_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

4P.

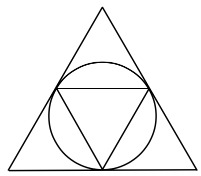
c)

n	1	2	3
a	3	5	16
b	4	12	30
c	5	13	34

Es gilt $a^2 + b^2 = c^2$, d. h. die Dreiecke sind rechtwinklig.

4P.

3. a) Das kleinere Dreieck hat die gleiche Fläche wie das Mittendreieck des größeren Dreiecks, also ist dessen Fläche viermal so groß, d. h. 12 cm².



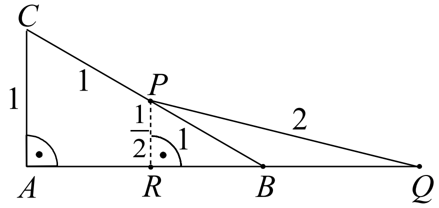
6P.

b) $AB = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = 2 \cdot AR$

$RQ^2 = PQ^2 - PR^2 = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{4}$

$AQ = AR + RQ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{5})$

Also $\frac{AQ}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



6P.

4. Mit der Drahtlänge $2x+5y=60$ folgt für die Fläche

$$A = x\cdot y = x\frac{60-2x}{5} = 12x-\frac{2}{5}x^2.$$

1. Lösung: $A = 12x-\frac{2}{5}x^2 = 90-\frac{2}{5}(x-15)^2$.
Also ist A maximal für $x=15$ und somit $y=6$. 12P.

2. Lösung: Aus $A' = 12-\frac{4}{5}x = 0$ folgt $x=15$ und $y=6$.
Wegen $A'' = -\frac{4}{5} < 0$ liegt ein Maximum vor.

---

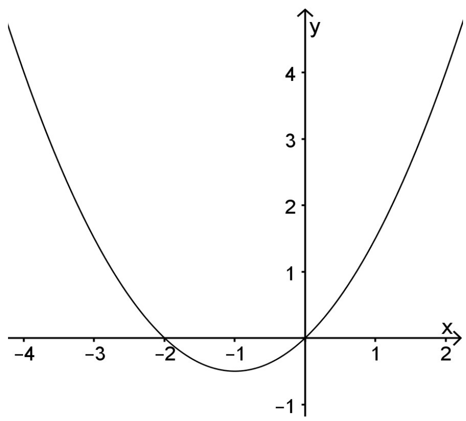
5. a) Seien a und b die Kantenlängen des großen bzw. kleinen Würfels.
Wegen $6a^2=24$ ist $a=2$.
Der Durchmesser der Kugel ist a.
Der Kugeldurchmesser ist die Raumdiagonale des kleinen Würfels. 4P.
Aus $a=\sqrt{3b^2}$ und $a=2$ folgt $b^2=\frac{4}{3}$.
Die Oberfläche ist daher $6b^2 = 8\ (cm^2)$.

b) Der Ikosaeder hat $20\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 30$ Kanten.
Durch die dreiseitigen Pyramiden kommen noch $20\cdot 3 = 60$ Kanten hinzu. 4P.
Also hat der Ikosaederstern $30+60=90$ Kanten.

c) Von der Oberfläche des Würfels werden drei rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke entfernt.
Also ist die gesuchte Fläche $6\cdot 2^2-3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{45}{2}$. 4P.

---

6. a) $y = \frac{x^2}{2}+x = \frac{x\cdot(x+2)}{2} = \frac{(x+1)^2-1}{2}$ 4P.



b) Aus $\frac{x^2}{2}+x = 3x+b$ folgt $\frac{1}{2}(x-2)^2 = b+2$, 4P.
also existieren nur zwei Lösungen,
wenn $b>-2$.

c) Die x-Koordinaten von P und Q sind $x = 2\pm\sqrt{2(b+2)}$, also liegen die Mittelpunkte von PQ auf der Geraden $x=2$. 4P.

7. a) Es gibt $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ Zahlen mit verschiedenen Ziffern. 4P.

b)
$$\begin{aligned} P(\text{Max gewinnt}) &= P(\text{mindestens eine 5 oder eine 6}) \\ &= 1 - P(\text{keine 5 und keine 6}) \\ &= 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{5}{9} \approx 56\,\%. \end{aligned}$$
4P.

c) Ersetzt man jeden Buchstaben durch die Anzahl der Worte, in denen er vorkommt, so kommt M in 20 Worten vor, also kann man Z E N T R U M 20 mal lesen. 4P.

```
      1
    1   1
  1   2   1
1   3   3   1
  4   6   4
   10  10
     20
```

8. a) Die 6 Jungen wiegen zusammen $6 \cdot 70$ kg, die 5 Mädchen $5 \cdot 48$ kg.
Also ist das Durchschnittsgewicht $\frac{6 \cdot 70 + 5 \cdot 48}{11} = 60$ (kg). 4P.

b) Sei v *(m/sek)* die Geschwindigkeit der Rolltreppe und s *(m)* die Länge.
Gesucht wird $\frac{s}{v}$.

Die Geschwindigkeit von Lena sei u *(m/sek)*. Dann gilt $v + u = \frac{s}{15}$ und $u = \frac{s}{20}$. 4P.

Hieraus folgt $v = \frac{s}{15} - \frac{s}{20} = \frac{s}{60}$.

Also braucht Lena $\frac{s}{v} = 60 \ (sek)$, wenn sie sich hoch fahren lässt.

c) Sei r die Seitenlänge des Quadrates. Dann gilt für die vergrößerte Fläche
$$r^2 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)^2 = r^2 \cdot \left(1 + \frac{125}{100}\right) \text{ bzw. } (r \cdot 1{,}5)^2 = r^2 \cdot 2{,}25 .$$
4P.

Also vergrößert sich die Fläche um 125%.