

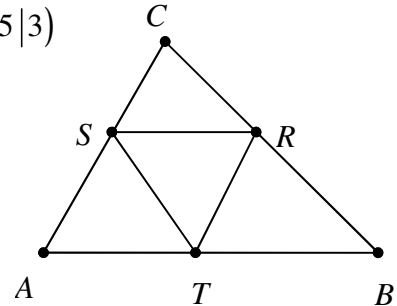
Mathematikwettbewerb 2011 der Jahrgangsstufe 11

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. Im (x, y) -Koordinatensystem sind $R(4|10)$, $S(1|7)$ und $T(5|3)$ die Seitenmitten eines Dreiecks ABC .

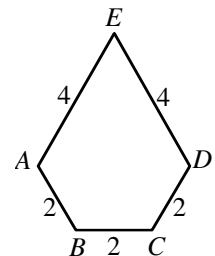
- Zeichnen Sie R , S und T in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Koordinaten von A , B und C .
- Wie groß ist der Winkel $\sphericalangle TSR$?
- Welche Fläche hat das Dreieck ABC ?
- Wie groß ist der Umkreisradius des Dreiecks ABC ?



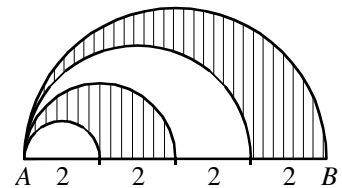
2. a) Für welche x gilt $3^{2+x} + 3^{2-x} = 82$?
- b) Für welche natürliche Zahl b ist $b^2 + 2011$ eine Quadratzahl?
Hinweis: 2011 ist eine Primzahl.

3. a) In dem Fünfeck ist $AB = BC = CD = 2$, $AE = DE = 4$ und $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DCB = 120^\circ$.

Berechnen Sie die Länge von AC und AD sowie die Fläche des Fünfecks.



- b) Der Durchmesser $AB = 8$ eines Halbkreises wird in vier gleiche Teile geteilt, über die Halbkreise gezeichnet werden. Berechnen Sie die schraffierte Fläche.

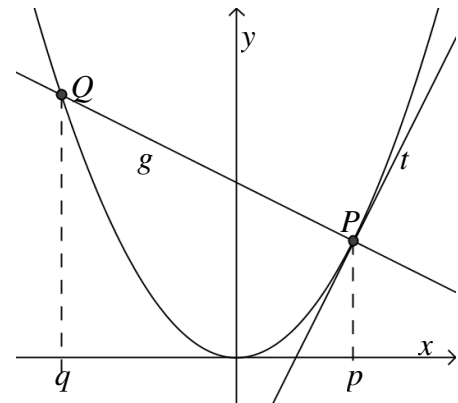


4. Gegeben seien die Parabel $y = x^2$, ein Parabelpunkt $P(p | p^2)$, $p > 0$, und die Tangente t in P (Steigung $2p$).

a) Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g durch P , die senkrecht auf der Tangente steht (in Abhängigkeit von p).

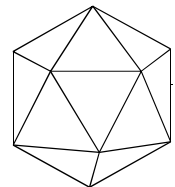
b) Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes $Q(q | q^2)$ von g mit der Parabel (in Abhängigkeit von p).

c) Wie muss P gewählt werden, damit die Ordinate von Q minimal wird, d.h. damit q^2 möglichst klein wird?



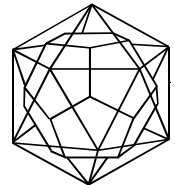
5. Ein Ikosaeder wird durch zwanzig gleichseitige Dreiecke begrenzt.

a) Wie viele Ecken und Kanten hat ein Ikosaeder?

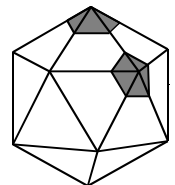


b) Verbindet man bei einem Ikosaeder die Flächenmitten mit den Mittelpunkten benachbarter Flächen, so erhält man das Kantenmodell eines Körpers.

Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat dieser Körper?

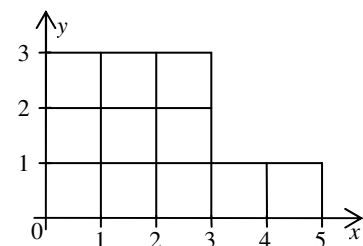


c) Schneidet man bei einem Ikosaeder alle Ecken ab (siehe Abbildung), so erhält man einen sogenannten Ikosaederstumpf. Durch welche und wie viele Flächen ist er begrenzt? Wie viele Ecken und Kanten hat er?



6. a) Im Koordinatensystem ist das abgebildete L-förmige Gebiet gegeben.

Welche Steigung hat die Ursprungsgerade, die dieses Gebiet in zwei flächengleiche Teile teilt?



b) Der Graph der Funktion $y = \log_{10}(x)$ wird

(i) an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelt bzw.

(ii) um 90° im Gegenuhrzeigersinn um den Koordinatenursprung gedreht.

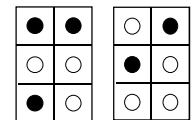
Welche Funktionen beschreiben die neuen Graphen von (i) und (ii)?

7. a) Für eine elektrische Uhr benötigt man zum Betrieb zwei geladene Batterien. In einer Schublade befinden sich 4 leere und 4 volle Batterien, denen man nicht ansieht, ob sie geladen oder nicht geladen sind. Es werden zufällig zwei ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P , dass die Uhr nicht läuft?
- b) Welches ist die größte natürliche Zahl n , für die 3^n Teiler von $30! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 30$ ist?
- c) Welches ist die letzte Ziffer (Einerziffer) von 2^{2011} ?

8. a) Im Eisland leben Elfen und Trolle. Die durchschnittliche Höhe von Elfen ist 60 cm , die der Trolle 220 cm . Die mittlere Höhe von Elfen und Trollen zusammen beträgt 120 cm .

Wenn im Eisland 40 Elfen leben, wie viele Trolle gibt es dann dort?

- b) In einer Blindenschrift verwendet man Punktmuster, die sich ertasten lassen; und zwar 3 in der Höhe und 2 in der Breite. Zum Beispiel stehen in der Abbildung die 3 schwarzen Punkte für den Buchstaben m und die 2 schwarzen für 9.



m

9

In dem 3×2 -Rechteck muss mindestens ein schwarzer Punkt vorhanden sein.

- (i) Wie viele Zeichen sind insgesamt möglich?
- (ii) Wie viele Zeichen sind mit 1, 2 und 3 Punkten möglich?