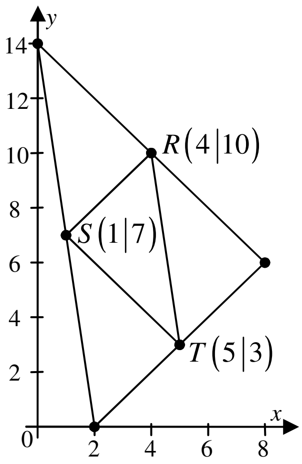
Lösungen zum
Mathematikwettbewerb 2011 der Jahrgangsstufe 11

1. a) $A(2|0)$, $B(8|6)$ und $C(0|14)$ **3P.**



b) Die Steigungen von ST und SR sind -1 und 1, also $\sphericalangle TSR = 90°$. **3P.**

c) Mit $AB = 2 \cdot SR = 6\sqrt{2}$ und $BC = 2 \cdot ST = 8\sqrt{2}$ folgt für die Fläche $\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2} = 48$. **3P.**

d) Der Umkreisradius ist $\frac{1}{2}AC = RT = \sqrt{18+32} = 5\sqrt{2}$. **3P.**

---

2. a) Mit $y := 3^x$ folgt $9y + \frac{9}{y} = 82$, also $y^2 - \frac{82}{9}y + 1 = 0$, und somit $\left(y - \frac{1}{9}\right) \cdot (y-9) = 0$. **6P.**

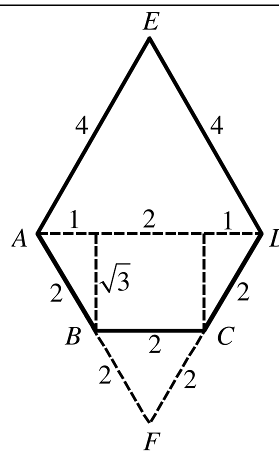
Aus $y = \frac{1}{9}$ und $y = 9$ folgt $x = -2$ bzw. $x = 2$.

b) Aus $b^2 + 2011 = a^2$ folgt $2011 = a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$ und somit $a + b = 2011$ und $a - b = 1$. **6P.**
Also $a = 1006$ und $b = 1005$ mit $1005^2 + 2011 = 1006^2$.

---

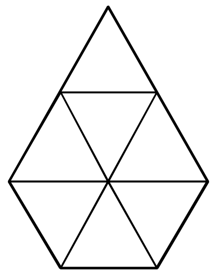
3. a) Das Dreieck ADE ist gleichseitig, also $AD = 4$.
Für AC gilt $AC = \sqrt{(1+2)^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}$

Ein gleichseitiges Dreieck mit Seite a hat die Fläche $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.



<u>1. Lösung:</u>
$$\frac{4^2}{4}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \frac{2^2}{4}\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

<u>2. Lösung:</u>
Ergänze das gleichschenklige Trapez zu dem gleichseitigen Dreieck AFD:
$$2 \cdot \frac{4^2}{4}\sqrt{3} - \frac{2^2}{4}\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$



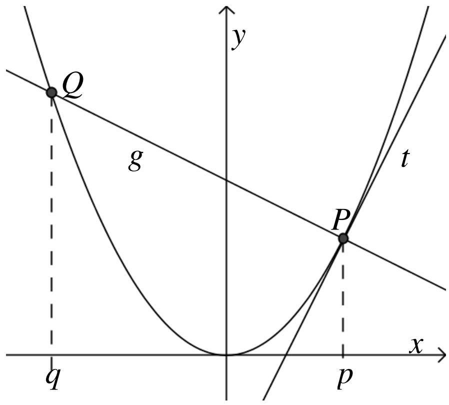
<u>3. Lösung:</u>
Das Fünfeck besteht aus sieben gleichseitigen Dreiecken:
$$7 \cdot \frac{2^2}{4}\sqrt{3} = 7\sqrt{3}.$$ **6P.**

b) $\frac{1}{2}\left(\pi \cdot 4^2 - \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2\right) = 5\pi$ **6P.**

4. a) g hat die Gleichung $y = -\frac{1}{2p} \cdot x + p^2 + \frac{1}{2}$ bzw. $y - p^2 = -\frac{1}{2p}(x - p)$. 4P.

b) Aus $q^2 - p^2 = -\frac{1}{2p}(q - p)$ folgt $q = -p - \frac{1}{2p}$, wegen $q^2 - p^2 = (q - p) \cdot (q + p)$,

also $Q\left(-p - \frac{1}{2p} \middle| \left(-p - \frac{1}{2p}\right)^2\right)$ 4P.



c) <u>1. Lösung durch quadratische Ergänzung:</u>

Es gilt $q^2 = \left(-p - \frac{1}{2p}\right)^2 = p^2 + 1 + \frac{1}{4p^2}$

$= \left(p - \frac{1}{2p}\right)^2 + 2.$

Also ist q^2 minimal für $p = \frac{1}{2p}$,

d.h. $P\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \middle| \frac{1}{2}\right)$. 4P.

<u>2. Lösung durch Differenzialrechnung:</u>

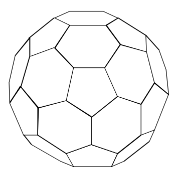
$q' = \left(-p - \frac{1}{2p}\right)' = -1 + \frac{1}{2p^2} = 0$, d.h. $p^2 = \frac{1}{2}$ und $P\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \middle| \frac{1}{2}\right)$.

---

5. a) Ein Ikosaeder hat 30 Kanten und 12 Ecken. 4P.

b) Man erhält einen Dodekaeder (12 Flächen, 30 Kanten, 20 Ecken). 4P.

c) Ein Ikosaederstumpf (Fußball) wird durch 12 Fünfecke und 20 Sechsecke begrenzt. Er hat 60 Ecken und 90 Kanten. 4P.

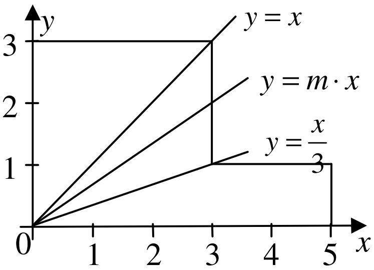


6. a) <u>1. Lösung:</u>
Die Fläche des Gebietes ist 11.

Für die Steigung der Geraden $y = mx$ gilt $\frac{1}{3} < m < 1$.

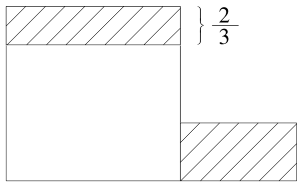
Das Trapez oberhalb von $y = mx$ hat die Fläche

$\frac{3+(3-3m)}{2} \cdot 3 = \frac{11}{2}$, also $m = \frac{7}{9}$.



6P.

<u>2. Lösung:</u>
Die beiden schraffierten Gebiete sind flächengleich, also muss die Gerade $y = mx$ das Rechteck mit dem Eckpunkt $\left(3 \middle| 3-\frac{2}{3}\right) = \left(3 \middle| \frac{7}{3}\right)$ halbieren, also ist $m = \frac{7}{9}$.



b) (i) Bei Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden geht $(x|y)$ nach $(y|x)$ über.

Aus $x = \log_{10}(y)$ folgt $y = 10^x$.

(ii) Bei einer $90°$ – Drehung geht $(x|y)$ über in $(y|-x)$.

Aus $-x = \log_{10}(y)$ folgt $y = 10^{-x}$.

6P.

---

7. a) Die Uhr läuft mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{8 \cdot 7} = \frac{3}{14}$.

Also gilt $P = 1 - \frac{3}{14} = \frac{11}{14} \approx 0{,}78$.

4P.

b) Die Tabelle zeigt die Vielfachen von 3 in 30! und wie oft diese durch 3 teilbar sind:

Dreierzahl	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Vielfache	1	1	2	1	1	2	1	1	3	1

Also ist $n = 1+1+2+1+1+2+1+1+3+1 = 14$

4P.

c) Die Folge der letzten Ziffer der 2er-Potenzen

Potenz	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	…
Einerziffer	2	4	8	6	2	4	8	6	…

hat die Periode 4.

Wegen $2011 = 502 \cdot 4 + 3$ ist die gesuchte Endziffer 8.

4P.

---

8. a) Sei t die Anzahl der Trolle. Dann gilt $\frac{40 \cdot 60 + t \cdot 220}{40 + t} = 120$, also $t = 24$. 6P.

b) (i) $2^6 - 1 = 63$

(ii) $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 6 + 15 + 20 = 41$

6P.