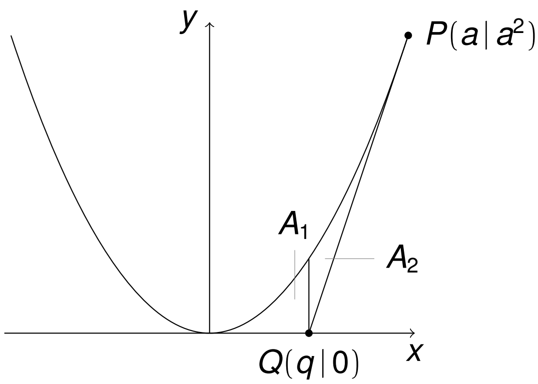
Tag der Mathematik 2015

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe G1

Im x-y-Koordinatensystem sei $P(a\,|\,a^2)$, $a > 0$, ein Punkt der Parabel $y = x^2$. Die Tangente in P schneide die x-Achse in $Q(q\,|\,0)$. Die Fläche zwischen der Parabel, der x-Achse und der Tangente wird durch $x = q$ in zwei Teilflächen A_1 und A_2 unterteilt.



Zeigen Sie $A_1 = A_2$.

Lösung

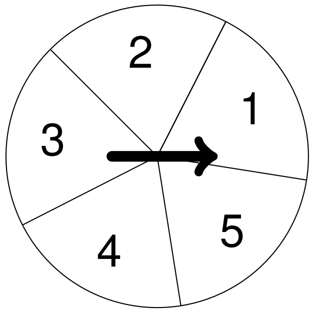
Die Tangente in $P(a\,|\,a^2)$ hat die Gleichung $y = 2ax - a^2$.

Also ist $Q(\frac{a}{2}\,|\,0)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{24}. \\
A_2 &= \int_{\frac{a}{2}}^{a} (x^2 - 2ax + a^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} - ax^2 + a^2x\right]_{\frac{a}{2}}^{a} \\
&= \frac{a^3}{3} - (\frac{a^3}{24} - \frac{a^3}{4} + \frac{a^3}{2}) = \frac{a^3}{24}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe G2

Die Klasse 10 hat zum Schulfest ein Glücksrad gebaut um die Klassenkasse aufzufüllen. Der Spieler zahlt 1€ Einsatz und darf das Rad 3-mal drehen. Für jede 1 erhält er 1€.



a) Welchen Gewinn (Auszahlung − Einsatz) darf die Klasse pro Spiel erwarten?

b) Die Auszahlung für 3 Einsen soll erhöht werden, dass das Spiel fair ist, das heißt der Gewinn soll Null sein.

Wie viel müsste für 3 Einsen ausgezahlt werden?

Lösung

a)

Auszahlung	Wahrscheinlichkeit
0	$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$
1	$3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}$
2	$3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{125}$
3	$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

Bei 125 Spielen werden

$$64 \cdot 0 + 48 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 75€$$

ausgezahlt und 125€ eingenommen, der Gewinn ist also $125 - 75 = 50$€.

Pro Spiel ist der Gewinn $\frac{50}{125} = \frac{2}{5} = 0{,}40$€.

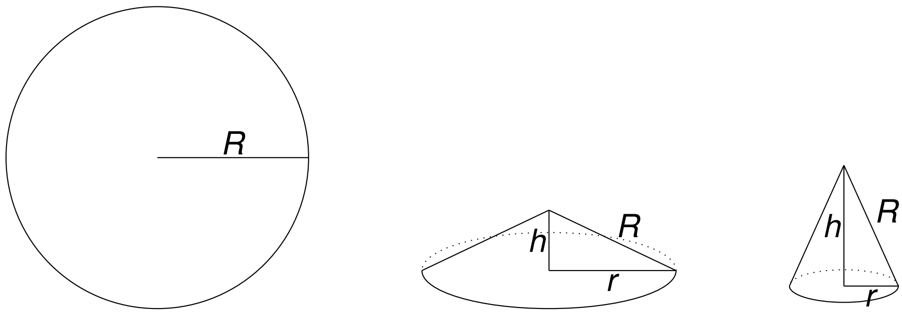
b) Sei x die Auszahlung bei 3 Einsen. Bei 125 Spielen muss dann gelten

$$64 \cdot 0 + 48 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 1 \cdot x = 125€.$$

Hieraus folgt $x = 125 - 72 = 53$€.

Zentrum für Mathematik · Kinzigstraße 32 · 64625 Bensheim · 06251-7079941
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe G3



Ein kreisförmiges Papier wird längs eines Radius R aufgeschnitten. Daraus lassen sich dann Kegelmäntel mit unterschiedlichen Grundflächen und Höhen bilden. Seien V das Volumen, h die Höhe und r der Radius des Kegels.

a) Bestimmen Sie $V(h)$.

b) Wie müssen h und r gewählt werden, damit der Kegel maximales Volumen hat? Berechnen Sie für diesen Fall $\frac{r}{h}$.

Lösung

a) Wegen $h^2 = R^2 - r^2$ gilt

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (R^2 - h^2).$$

b) *1. Lösung:* Es gilt

$$V(h) = \frac{\pi}{3}(R^2 h - h^3) = \frac{\pi}{3}\Big(2\frac{R^3}{3\sqrt{3}} - \big(h - \frac{R}{\sqrt{3}}\big)^2\big(h + \frac{2R}{\sqrt{3}}\big)\Big).$$

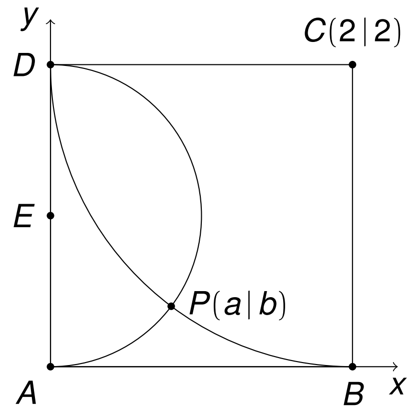
Also wird $V(h)$ maximal für $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ und $r = \sqrt{R^2 - h^2} = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, und somit $\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{2}}{1}$.

2. Lösung: Aus $V'(h) = \frac{\pi}{3}(R^2 - 3h^2) = 0$ folgt $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Wegen $V''(h) = -2\pi h < 0$ liegt ein Maximum vor.

Mit $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ folgt $r = \sqrt{R^2 - h^2} = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ und somit $\frac{r}{h} = \sqrt{2}$.

Aufgabe G4



Ein Quadrat $ABCD$ im x-y-Koordinatensystem hat die Ecken $A(0|0)$, $B(2|0)$, $C(2|2)$ und $D(0|2)$.

Sei $P(a|b)$ der Schnittpunkt des Viertelkreises um C durch B und des Halbkreises über AD mit dem Mittelpunkt $E(0|1)$.

Zeigen Sie:

$$\frac{PB}{PA} = \sqrt{2}.$$

Lösung

1. Lösung:

Da P auf dem Kreis um E liegt, gilt $a^2 + (b-1)^2 = 1$. Da P auf dem Kreis um C liegt, gilt $(a-2)^2 + (b-2)^2 = 4$.

Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a^2 \qquad + b^2 - 2b &= 0 \\ a^2 - 4a + b^2 - 4b &= -4 \end{aligned}$$

ergibt $4a + 2b = 4$ bzw. $b = 2 - 2a$, also $a^2 + (2-2a)^2 - 2(2-2a) = 0$ bzw. $5a^2 - 4a = 0$, also $a(5a-4) = 0$; wegen $a \neq 0$ ist $a = \frac{4}{5}$ und damit $b = \frac{2}{5}$.

$$PA = \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{5}\right)^2} = \tfrac{1}{5}\sqrt{20}; \qquad PB = \sqrt{\left(2 - \tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{5}\right)^2} = \tfrac{1}{5}\sqrt{40}.$$

Also ist $\frac{PB}{PA} = \sqrt{2}$.

2. Lösung:

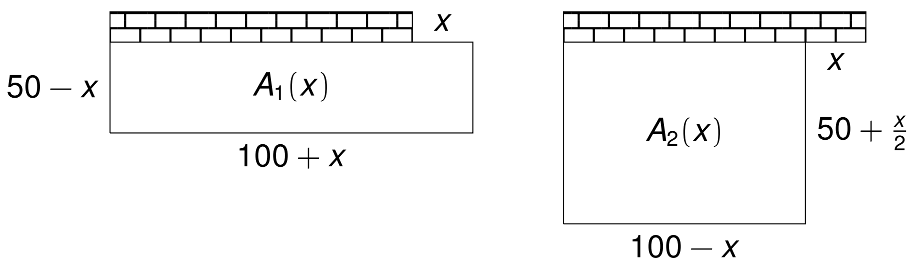
Es gilt für PE: $a^2 + (1-b)^2 = 1$, also $a^2 + b^2 = 2b$,
und für PC: $(2-a)^2 + (2-b)^2 = 4$, also $(2-a)^2 + b^2 = 4b$.

Hieraus folgt

$$\frac{PB^2}{PA^2} = \frac{(2-a)^2 + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{4b}{2b} = 2.$$

Aufgabe E1

Auf einer Wiese mit einer 100 m langen Steinmauer will Bauer Alfred mit 200 m Maschendraht eine rechteckige Weide einzäunen. Wie muss der Bauer – unter ganzer oder teilweiser Einbeziehung der Mauer – den Zaun errichten, damit eine möglichst große Weide zur Verfügung steht.



Lösung

1. Lösung:
Es ist $A_1(x) = (100+x)(50-x) = 5000 - 50x - x^2$ und $A_1'(x) = -50 - 2x$.

Für $x \geqslant 0$ ist $A_1'(x) = -50 - 2x < 0$, also ist A_1 streng monoton fallend. Somit liegt das Maximum bei $x = 0$.

Für $A_2(x) = (100-x)(50+0{,}5x) = 5000 - 0{,}5x^2$ ist das Maximum bei $x = 0$.

Da in beiden Fällen das Maximum bei $x = 0$ liegt, muss der Bauer die ganze Mauer einbeziehen, sodass die Weide eine Länge von 100 m und eine Breite von 50 m hat.

2. Lösung: Für $x \geqslant 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
A_1(x) &= (100+x)(50-x) &&= 5000 - x(x+50),\\
A_2(x) &= (100-x)(50+\frac{x}{2}) &&= 5000 - \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Bei beiden Flächen wird für $x > 0$ von 5000 etwas Positives abgezogen.

Also hat die Weide die maximale Fläche von $5000\ \mathrm{m}^2$ für $x = 0$.

Aufgabe E2

In einer Keramikfabrik werden Fliesen als unbrauchbar ausgesondert, wenn sie sowohl einen Form- als auch einen Farbfehler aufweisen. Fliesen, die ausschließlich einen Farbfehler haben, können noch als 2. Wahl im Verkauf angeboten werden. (Farb- und Formfehler treten im Produktionsprozess unabhängig voneinander auf.)

Durchschnittlich sind 5% der Fliesen wegen Farb- und Formfehler unbrauchbar, während 20% als 2. Wahl verkauft werden.

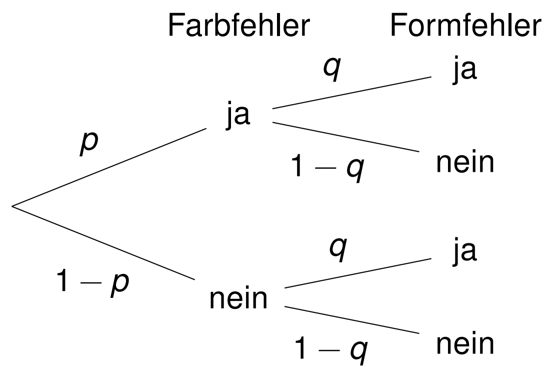
Wie viel Prozent der hergestellten Fliesen haben einen

a) Farbfehler,

b) Formfehler?

Lösung

Seien p und q die Wahrscheinlichkeiten, dass eine Fliese einen Farbfehler bzw. einen Formfehler hat.



Ausschuss 5%: $p \cdot q = \frac{1}{20}$

2. Wahl 20%: $p \cdot (1 - q) = \frac{1}{5}$

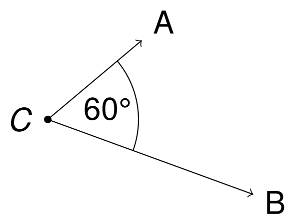
Also $p = \frac{1}{4} = 25\%$ und $q = \frac{1}{5} = 20\%$.

a) 25% der Fliesen haben einen Farbfehler.

b) 20% der Fliesen haben einen Formfehler.

Aufgabe E3

Zwei Schiffe A und B verlassen gleichzeitig den Hafen C mit den konstanten Geschwindigkeiten von 20 km/h bzw. 32 km/h. Der Winkel zwischen den Fahrtrouten beträgt 60°.



Wie weit sind die Schiffe nach 2,5 Stunden voneinander entfernt?

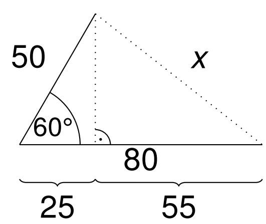
Lösung

Entweder

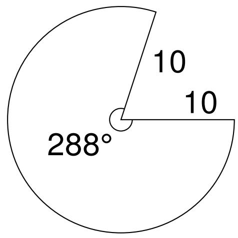
$$x^2 = 50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 60° = 70^2$$

oder

$$x^2 = 55^2 + \left(\frac{50}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 70^2.$$

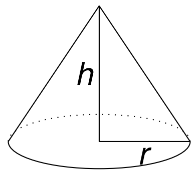


Aufgabe E4



Aus einem Kreisausschnitt mit dem Radius 10 und dem Mittelpunktswinkel von 288° kann durch aneinander legen der geraden Teile ein Kegel gebildet werden.

Berechnen Sie den Radius r, die Höhe h sowie das Volumen V des Kegels.



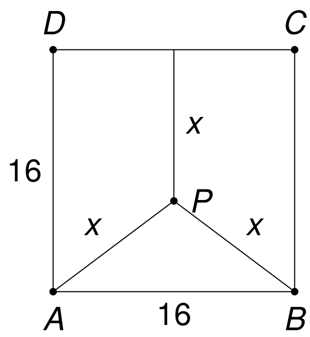
Lösung

Für den Umfang der Kegelgrundfläche gilt $2\pi r = 2\pi \cdot 10 \cdot \frac{288}{360}$, also $r = 8$ und $h = \sqrt{10^2 - r^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$.

Also ist $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 64 \cdot 6 = 128\pi$.

Zentrum für Mathematik · Kinzigstraße 32 · 64625 Bensheim · 06251-7079941
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe H1



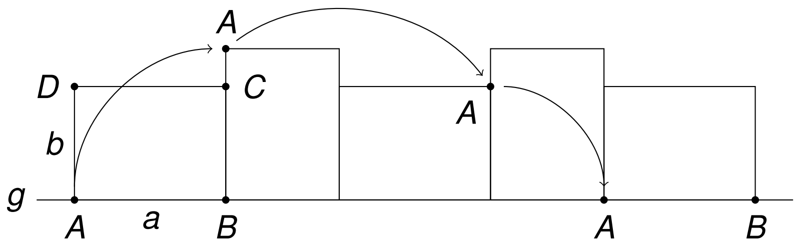
In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 16 hat ein Punkt P von A, B und dem Mittelpunkt von CD den gleichen Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand.

Lösung

Es gilt $16 = x + \sqrt{x^2 - 8^2}$, also $x = 10$.

Aufgabe H2

Ein Rechteck *ABCD* mit $a = 4$ und $b = 3$ liegt mit der Seite *AB* auf einer Geraden g. Dann wird das Rechteck auf g so lange abgerollt, bis *AB* wieder auf g liegt.



Wie lang ist der Weg, den *A* beim Abrollen zurücklegt?

Lösung

$$\frac{\pi}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2} + b\right) = \frac{\pi}{2}(4 + 5 + 3) = 6\pi.$$

Aufgabe H3

Opa Alfred sagte an seinem Geburtstag:

> „Heute bin ich in einem Zahlensystem (100) und in einem anderen (1000) Jahre alt geworden.“

Wie alt ist er geworden?

Hinweis: Zum Beispiel bedeutet (101) im Fünfersystem

$$(101)_5 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = 26$$

im Zehnersystem. Im Zweiersystem gilt

$$(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 11.$$

Lösung

Seien x und y die gesuchten Zahlsysteme, das heißt es gilt $(1000)_x = x^3$ und $(100)_y = y^2$.

Aus $y^2 = x^3$ folgt $y = x\sqrt{x}$, also muss x eine Quadratzahl sein.

Aus der Tabelle

x	4	9	$\cdots$
y	8	27	$\cdots$

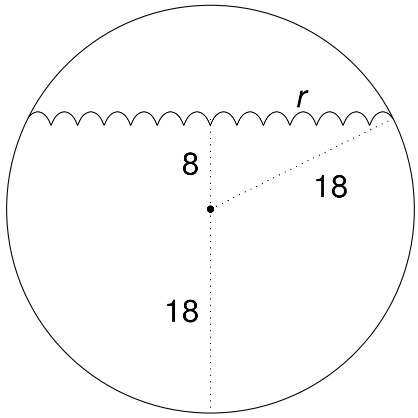
folgt $x = 4$ und $y = 8$, denn $(100)_{27} = (1000)_9 = 729$ wäre ein zu hohes Alter.

Wegen $(100)_8 = (1000)_4 = 64$ ist der Opa 64 Jahre alt.

Aufgabe H4

In einem kugelförmigen Aquarium mit einem Radius von 18 cm ist das Wasser an der tiefsten Stelle 26 cm tief. Wie groß ist die Wasseroberfläche?

Lösung



Für den Radius der Wasseroberfläche gilt $r^2 = 18^2 - 8^2 = 260$. Also ist die Oberfläche $\pi r^2 = 260\pi$ (cm^2).

Aufgabe H5

Welches ist die letzte Ziffer von 3^{2015}?

Lösung

Die letzten Stellen der 3-er Potenzen $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots$ sind $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \ldots$, das heißt die Folge hat Periode 4.

Wegen $2015 = 503 \cdot 4 + 3$ endet 3^{2015} wie 3^3 auf 7.

Aufgabe H6

Palindrome sind natürliche Zahlen, die von vorn und von hinten gelesen gleich sind. Zum Beispiel sind 1331 ein vierstelliges und 46964 ein 5-stelliges Palindrom.

Wie viele Palindrome gibt es mit

a) 4 Stellen,

b) 5 Stellen?

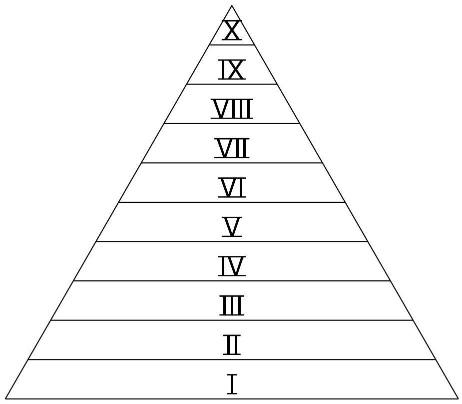
Lösung

a) $9 \cdot 10 = 90$,

b) $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Für die erste Stelle gibt es nur 9 mögliche Zahlen, da 0 nicht erlaubt ist.

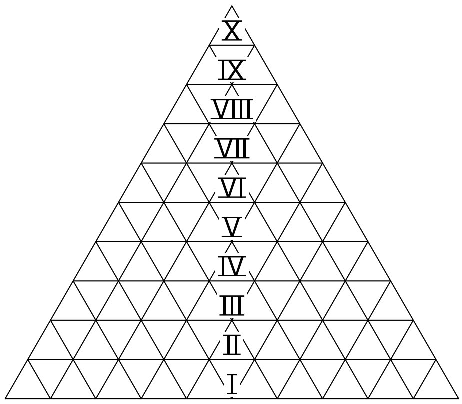
Aufgabe H7



Eine Zielscheibe in Form eines gleichseitigen Dreiecks ist durch 9 äquidistante parallele Linien in 10 Sektoren (I bis X) unterteilt.

Berechnen Sie die Einzelwahrscheinlichkeit, mit der jeweils die Bereiche X, VIII und IV getroffen werden, und zwar unter der Annahme, dass die Zielscheibe immer und jeder Punkt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit getroffen wird.

Lösung

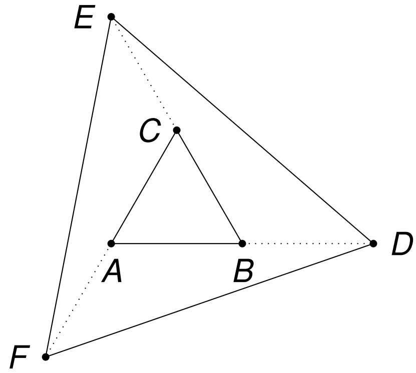


Unterteilt man das Dreieck durch weitere Linien und nimmt man für den Sektor X die Fläche 1 an, so haben die anderen Sektoren folgende Flächen:

Sektor	Fläche
X	1
IX	3
VIII	5
VII	7
VI	9
V	11
IV	13
III	15
II	17
I	19

Das Dreieck hat die Fläche $1 + 3 + 5 + \cdots + 15 + 17 + 19 = 100$. Somit sind die gesuchten Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{100} = 0{,}01$, $\frac{5}{100} = 0{,}05$ beziehungsweise $\frac{13}{100} = 0{,}13$.

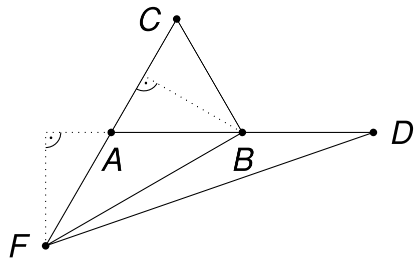
Aufgabe H8



Gegeben sei das gleichseitige Dreieck *ABC*. Das Dreieck *DEF* entsteht dadurch, dass *A* an *B*, *B* and *C* und *C* an *A* gespiegelt wird.

In welchem Verhältnis stehen die Flächen der Dreiecke *DEF* und *ABC*?

Lösung



Die Dreiecke *ABF* und *BDF* sind flächengleich, denn es ist $AB = BD$ und sie haben die gleiche Höhe durch *F*.

Die Dreiecke *ABF* und *ABC* sind flächengleich, denn sie haben die gleiche Höhe durch *B* und es gilt $AF = AC$.

Entsprechendes gilt für die beiden anderen Teilflächen. Also ist das gesuchte Verhältnis 7:1.