Lösungen zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2012

1. a) (i) Die Diagonalen sind gleich lang. 3P.

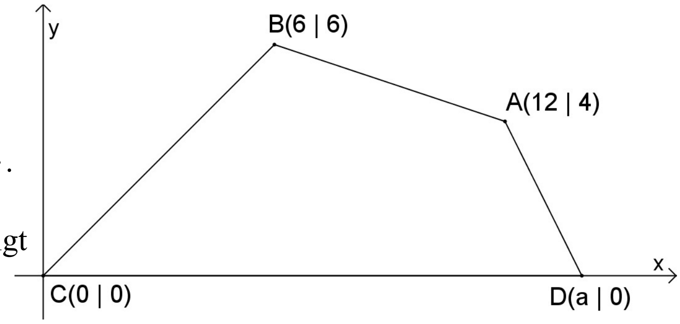
(ii) Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander. 3P.

b) (i) Das Viereck $ABCE$ mit $E(12|0)$ hat die Fläche 48.
Aus $\frac{1}{2}(a-12)\cdot 4 = 52-48$ folgt $a = 14$. 3P.

(ii) Steigung von AC: $\frac{1}{3}$.

Steigung von BD: $\frac{6}{6-a}$.

Aus $\frac{6}{6-a} \cdot \frac{1}{3} = -1$ folgt
$a=8$. 3P.



2. a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	$\cdots$
Rest $2^n:9$	1	2	4	8	7	5	1	2	$\cdots$

6P.

Die Folge der Reste hat die Periode 6.

Wegen $2012 = 335\cdot 6+2$ ist der Rest von $2^{2012}:9 = 4$

b)
$$\begin{aligned} 5^{16}-2^{16} &= (5^8+2^8)\cdot(5^8-2^8) \\ &= (5^8+2^8)\cdot(5^4+2^4)\cdot(5^4-2^4) \\ &= (5^8+2^8)\cdot(5^4+2^4)\cdot(5^2+2^2)\cdot(5^2-2^2) \\ &= (5^8+2^8)\cdot(5^4+2^4)\cdot 29\cdot 7\cdot 3 \end{aligned}$$
6P.

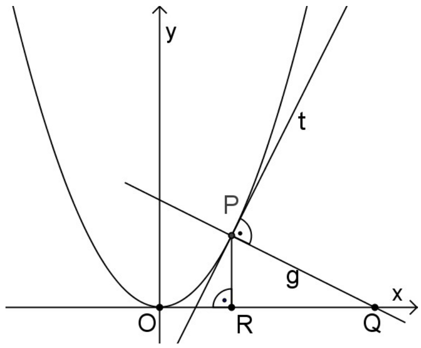
3. a) Die Quadratseite ist die Diagonale des Rechteckes, also $\sqrt{8^2+6^2}=10$.
Innenradius 5. Umkreisradius $5\cdot\sqrt{2}$. 6P.

b) Das Dreieck ABE ist rechtwinklig mit $BE = \sqrt{10^2-8^2} = 6$.
Die Fläche des Dreiecks ABE ist zum Einen $\frac{1}{2}\cdot AE\cdot BE = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6 = 24$, zum Anderen $\frac{1}{2}\cdot AE\cdot BC = 56$, also $BC = \frac{24}{5}$. 6P.

Somit ist die Fläche des Rechtecks $AB\cdot BC = 10\cdot\frac{24}{5} = 48$.

4. a) g hat die Gleichung $\dfrac{y-p^2}{x-p} = -\dfrac{1}{2p}$ bzw. $y = -\dfrac{1}{2p}(x-p)+p^2$. **4P.**

b) g schneidet die x-Achse in $Q\left(p+2p^3|0\right)$. **4P.**



c) $\dfrac{OQ}{PR} = \dfrac{p+2p^3}{p^2} = \dfrac{1}{p}+2p$

1. Lösung durch quadratische Ergänzung:

$$\frac{OQ}{PR} = \frac{1}{p}+2p = \left(\frac{1}{\sqrt{p}}-\sqrt{2p}\right)^2 + 2\sqrt{2}$$

ist minimal für $\dfrac{1}{\sqrt{p}}-\sqrt{2p} = 0$, also für $p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **4P.**

2. Lösung durch Differenzialrechnung:

Aus $\left(\dfrac{1}{p}+2p\right)' = -\dfrac{1}{p^2}+2 = 0$ folgt $p=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Wegen $\left(\dfrac{1}{p}+2p\right)'' = \dfrac{2}{p^3} > 0$ für $p = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ liegt ein Minimum vor.

---

5. 1. Lösung:
Seien h und H die Höhen des kleinen bzw. großen Zylinders.
Das Wasservolumen ist in beiden Fällen gleich, d. h.
$(20-H)\cdot\pi\cdot 1^2+H\cdot\pi\cdot 3^2 = (28-h)\cdot 3^2+h\cdot\pi\cdot 1^2$, hieraus folgt $h+H=29$. **12P.**

2. Lösung:
Sei x die gesamte Höhe der Flasche.
Das Luftvolumen ist in beiden Fällen gleich, d. h. $(x-20)\cdot\pi\cdot 1^2=(x-28)\cdot\pi\cdot 3^2$.
Hieraus folgt $x=29$.

---

6. In der quadratischen Gleichung
von Simon: $y = (x-4)\cdot(x-5) = x^2-9x+20$ ist 20 falsch,
von Jakob: $y = (x-2)\cdot(x-4) = x^2-6x+8$ ist -6 falsch. **12P.**
Also stand an der Tafel $y = x^2-9x+8$.

Die gesuchten Lösungen sind 1 und 8.

7. a) Unter den 199 Zahlen gibt es $\left[\frac{199}{5}\right] = 39$ durch 5 teilbare, $\left[\frac{199}{7}\right] = 28$ durch 7 teilbare und $\left[\frac{199}{35}\right] = 5$ durch 35 teilbare Zahlen. <u>6P.</u>

Also sind $39+28-5 = 62$ Zahlen durch 5 oder 7 teilbar
und somit $199-62 = 137$ weder durch 5 noch durch 7 teilbar.

b) Die gesuchten Zahlen haben die Form 1x1, 11x, 1xx, $x = 0,2,3,\cdots,9$.
Also gibt es $9+9+9 = 27$ Zahlen mit genau zwei gleichen Ziffern. <u>6P.</u>

---

8. a) Benzinverbrauch auf 100 km $\frac{3{,}8\cdot 100}{16\cdot 1{,}6} \approx 15l.$ <u>3P.</u>

b) $1\,l$ Benzin kostet $\frac{2{,}50}{1{,}4\cdot 3{,}8} \approx 0{,}45€$. <u>3P.</u>

c) Zeit für die Hinfahrt $\frac{120}{30} = 4$ Stunden, für die Rückfahrt $\frac{120}{60}=2$ Stunden. <u>3P.</u>
Durchschnittsgeschwindigkeit $\frac{2\cdot 120}{2+4} = 40\,mph = 64\,km/h$.

d) Sei n die Anzahl Familienmitglieder. Dann gilt $\frac{n\cdot(n-1)}{2} = 28$, <u>3P.</u>
also $n\cdot(n-1)=8\cdot 7$ und somit $n=8$.