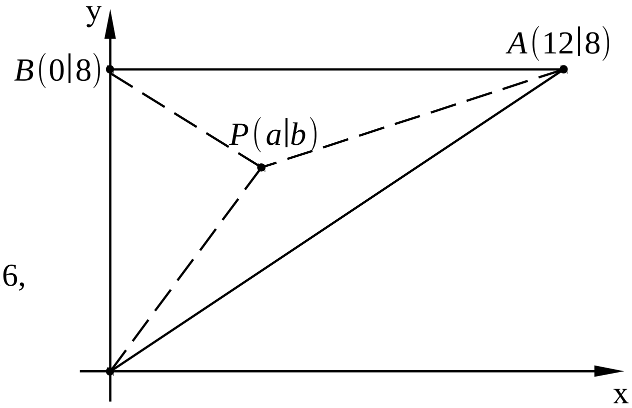
Lösungen zu den Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2016 am 17.02.2016



1. a) Das Dreieck ABO ist rechtwinklig und hat die Fläche $\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 8 = 48$.
Daher müssen die Teildreiecke die Fläche $\frac{48}{3} = 16$ haben.
Also gilt $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot a = 16$ und $\frac{1}{2}\cdot 12\cdot(8-b) = 16$,
und somit $a = 4$ und $b = \frac{16}{3}$.

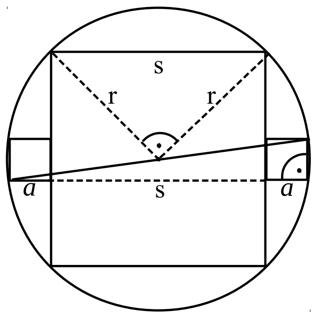
b) Die Seitenhalbierende durch $(0|0)$ und den Mittelpunkt $(6|8)$ von AB hat die Gleichung $y = \frac{8}{6}x$.
Die Seitenhalbierende durch $B(0|8)$ und den Mittelpunkt $(6|4)$ von AO hat die Gleichung $y = -\frac{4}{6}x+8$.
Für den Schnittpunkt $(x|y)$ gilt $\frac{8}{6}x = -\frac{4}{6}x+8$, also $x = 4$ und $y = \frac{16}{3}$.

2. Aus $abc = 9\cdot ac+6\cdot c$ folgt $100a+10b+c = 9\cdot(10a+c)+6\cdot c$, also $5(a+b) = 7c$.
Somit muss $c = 5$ sein und $a+b = 7$.

a	b	abc
1	6	165
2	5	255
3	4	345
4	3	435
5	2	525
6	1	615
7	0	705

Es gibt 7 dreistellige Zahlen.

3. Sei r der Radius des Kreises.
Dann gilt $(2r)^2 = a^2+(s+2a)^2$ und $s = r\sqrt{2}$.
Hieraus folgt
$$0 = s^2-4as-5a^2 = (s-5a)(s+a),$$
also $s = 5a$.



4. Die Treibstoffkosten pro Stunde sind $k \cdot v^2$, wobei gilt $900 = k \cdot 30^2$, also $k = 1$.
   Die Fahrtzeit beträgt $\frac{225}{v}$.
   Also sind die Gesamtkosten $g(v) = \frac{225}{v}\left(v^2+400\right) = 225\left(v+\frac{400}{v}\right)$.

   1. Lösung:
   Aus $g(v) = 225\left(v+\frac{400}{v}\right) = 225\left(\sqrt{v}-\frac{20}{\sqrt{v}}\right)^2 + 225 \cdot 40$ folgt
   $v = 20\frac{km}{h}$, damit $g(v)$ minimal wird.

   2. Lösung:
   Aus $g'(v) = 225\left(1-\frac{400}{v^2}\right) = 0$ folgt $v = 20\frac{km}{h}$.
   Wegen $g''(v) = 225 \cdot \frac{800}{v^3} > 0$ liegt ein Minimum vor.

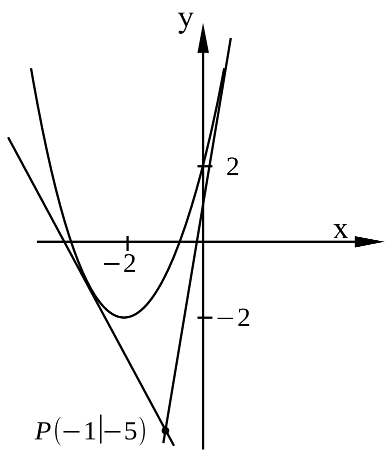
5. a) 4

   b) $4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 24$

   c) $8+12 = 20$

6. a) Wegen $y = x^2+4x+2 = (x+2)^2-2$ ist der Scheitel $(-2|-2)$.
   Aus $x^2+4x+2 = 0$ folgen die Nullstellen $x=-2\pm\sqrt{2}$,
   also $x \approx -0{,}6$ und $x \approx -3{,}4$.

   b) Für die Tangente im Parabelpunkt $Q(x|y)$ gilt
   $2x+4 = \frac{y+5}{x+1}$ und somit $(2x+4)(x+1)=x^2+4x+2+5$.
   Hieraus folgt $0 = x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$.
   Also sind die Berührpunkte $(1|7)$ und $(-3|-1)$.



7. a) 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207

b) Seien a und b zwei aufeinander folgende Glieder.
Dann sind $a, b, a+b, a+2b, 2a+3b$.
Ist a durch 3 teilbar, dann auch $2a+3b$.

c) $\underline{4, 7}$, 3, 2, 5, 7, 4, 3, 7, 2, 1, 3, $\underline{4, 7}$ Periode 12

---

8. a) Sei b der ursprüngliche Buchpreis und p der gesuchte Prozentsatz.
Dann muss gelten $b\left(1-\frac{20}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right) = b$.
Hieraus folgt $p\% = 25\%$.

b) Sei m die Anzahl der Meerschweinchen und s die Summe aller Alter.
Dann gilt $\frac{s}{m+2} = 16$ und $\frac{s-32}{m+1} = 12$.
Hieraus folgt $s = 16(m+2) = 12(m+1)+32$ und somit $m = 3$.