Mathematikwettbewerb 2001 der Jahrgangsstufe 11

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal).

1. Gegeben ist die Gerade g mit $2y - x = 4$.

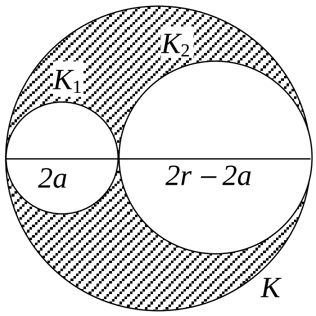
   a) Die Gerade g_1 sei das Spiegelbild von g bzgl. der 1. Winkelhalbierenden.
   Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks zwischen g, g_1 und der y-Achse.

   b) Die Gerade g_2 sei symmetrisch zu g bzgl. der x-Achse.
   Geben Sie die Geradengleichung von g_2 an.

   c) Bestimmen Sie den Winkel zwischen g_1 und g_2.

   Die Geraden g_1 und g_2 begrenzen mit der x-Achse ein Dreieck. Bestimmen Sie die Koordinaten des Umkreismittelpunktes M dieses Dreiecks.

2. Gegeben ist eine Kugel K mit dem Radius r. Innerhalb von K liegen zwei Kugeln K_1 und K_2 mit den Radien a bzw. $r - a$, die sich von außen berühren (s. Abb.).

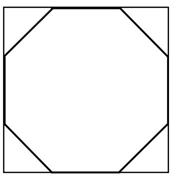


   a) Wie muss a gewählt werden, damit das Volumen des Gebietes innerhalb von K und außerhalb von K_1 und K_2 maximal wird?

   b) Bestimmen Sie a so, dass die Summe der Oberflächen von K_1 und K_2 minimal wird.

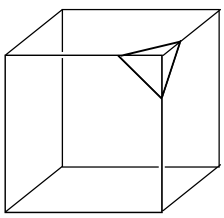
3. a) Die Ecken eines Einheitsquadrates werden so abgeschnitten, dass ein regelmäßiges Achteck entsteht.

   Bestimmen Sie die Seitenlänge und die Fläche dieses Achtecks.



   b) Die acht Ecken eines Einheitswürfels werden so abgeschnitten, dass auf jeder Seitenfläche ein regelmäßiges Achteck entsteht.

   Bestimmen Sie die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen des so entstandenen Körpers.
   Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche dieses Körpers.



4. Die Parabel $y = x^2 - px + q$ schneidet die y-Achse im Punkt (0 | 4). Ihre Nullstellen haben den Abstand 3.

   Für welche p und q sind diese Bedingungen erfüllt?
   Zeichnen Sie die Parabeln.

---

5. Gegeben ist eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit $a_1 = -6,\ a_2 = 3,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n-1}\right)$.

   a) Berechnen Sie a_3, a_4 und a_5.

   b) Zeigen Sie, dass $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine geometrische Folge ist, d.h. zu zeigen ist:

   Wenn $\frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{1}{2}$, dann ist $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{2}$.

   c) Berechnen Sie die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$.

---

6. a) Die Höhe eines Zylinders wird um 25% vergrößert.

   Um wieviel Prozent muss der Radius verkleinert werden, damit das Volumen konstant bleibt?

   b) Bei einer Exponentialfunktion $f(x) = 10^{-kx}$ verkleinert sich $f(x)$ um 40%, wenn x von 3 auf 3,5 anwächst.

   Wie groß ist k ?

---

7. Für welches $r > 0$ hat das Gleichungssystem

$$x \cdot y = 1$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

   a) keine Lösung?

   b) genau zwei Lösungen?

   c) vier Lösungen?

   Hinweis: Interpretiert man die Gleichungen geometrisch, so sind die gesuchten Lösungen Punkte im Koordinatensystem.

---

8. Für eine Funktion f gilt: $f(1) = 1$ und $f(x) = x \cdot f(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

   Für welche ganzen Zahlen n ist $f(n) = 0$ und für welche gilt $f(n) \neq 0$?
