

## Mathematikwettbewerb 2003 der Jahrgangsstufe 11

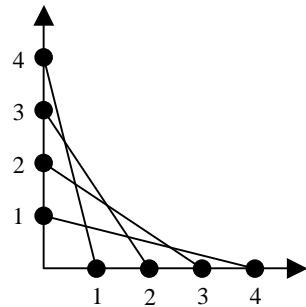
**Hinweis:** Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. a) Wie muss  $b$  gewählt werden, damit der Punkt  $(5 | b)$  auf der Geraden durch  $(2 | -3)$  und  $(4 | 3)$  liegt?
- b) Spiegelt man die Gerade  $x - 3y + 10 = 0$  an der  $x$ -Achse, so erhält man die Gerade  $y = mx + b$ . Bestimmen Sie  $m$  und  $b$ .
- c) Wie muss  $a$  gewählt werden, damit die Geraden  $x + 2y = 3$  und  $3y + ax = 2$  senkrecht aufeinander stehen?

2. a) Berechnen Sie  $\frac{2^{2003} + 2^{2001}}{2^{2002} - 2^{2000}}$ .
- b) Die Verknüpfung  $*$  sei definiert durch  $a * b = a^b - b^a$ . Berechnen Sie  $2 * (-1)$ .
- c) Lösen Sie nach  $x$  auf:  $\log_{10}(2x - x^2) = 0$ .
- d) Sei  $f(x) = x^2 + 6x + c$ , wobei  $c$  eine ganze Zahl ist. Zeigen Sie, dass  $f(0) + f(-1)$  ungerade ist.

3. a) Bestimmen Sie das 100. Glied der Folge 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, ... .  
(Jede natürliche Zahl  $n$  kommt genau  $n$ -mal vor.)
- b) Die Zahlen 2447, 3665 und 1231 haben etwas gemeinsam:  
Jede Zahl ist vierstellig, hat genau zwei gleiche Ziffern und keine der vier Ziffern ist 0.  
Wie viele solcher Zahlen gibt es?
- c) Verbindet man 4 Punkte auf der  $x$ -Achse mit 4 Punkten auf der  $y$ -Achse (siehe Abbildung), so erhält man 6 Schnittpunkte.  
Wie viele Schnittpunkte erhält man bei jeweils 10 Punkten auf jeder Achse?



4. a) Zwei gleichlange Kerzen brennen unterschiedlich schnell ab, und zwar die eine in 3 Stunden und die andere in 4 Stunden. Beide Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Nach welcher Zeit ist die eine Kerze doppelt so lang wie die andere?
- b) Eine Mäusepopulation besteht am Anfang aus 10 Tieren. Jeden Monat verdreifacht sich die Zahl der Mäuse. Berechnen Sie, im wievielten Monat die Population zum ersten Mal eine Million Tiere erreicht!
- c) Das mittlere Alter einer Gruppe von 50 Personen ist 38. Wenn zwei Personen im Alter von 33 und 43 die Gruppe verlassen, wie hoch ist dann das durchschnittliche Alter der restlichen 48 Personen?

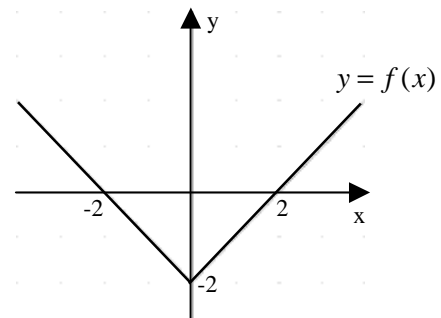


5. a)  $a$  ist um 50 % größer als  $c$  und  $b$  ist um 25 % größer als  $c$ .  
Um wie viel Prozent ist  $a$  größer als  $b$ ?
- b) Eine Glasscheibe von 1 cm Dicke lässt nur 75 % Licht durch.  
(i) Wie viel Prozent Licht wird von einer 3 cm dicken Glasscheibe durchgelassen?  
(ii) Wie viel Prozent durchgelassenes Licht wird man bei einer Glasscheibe von 0,5 cm Dicke vermuten?
- c) Ein Pilz wog 100 g und bestand zu 96 % aus Wasser. Während einer regnerischen Woche absorbiert er so viel Wasser, dass er nun zu 98 % aus Wasser besteht.  
Wie viel wiegt er nun?

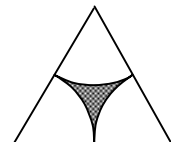
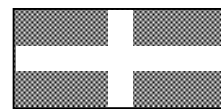
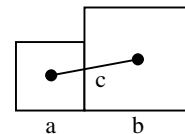
6. a) Ermitteln Sie unter allen Rechtecken mit Umfang 20 dasjenige mit der größten Fläche!
- b) Wie muss man  $c$  wählen, damit die Parabel  $y = 3x - x^2 + c$  die  $x$ -Achse berührt?
- c) Wie viele Lösungen hat die Gleichung

$$\left| |f(x)| - 1 \right| = \frac{1}{2},$$

wenn  $f$  im Koordinatensystem die nebenstehende Darstellung hat?



7. a) Welchen Abstand  $c$  haben die Mitten der beiden Quadrate mit den Seiten  $a$  und  $b$ ?
- b) Eine Flagge zeigt ein weißes Kreuz auf rotem Untergrund. Die horizontalen und vertikalen weißen Streifen haben die gleiche Breite. Die Flagge ist  $48 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$  groß. Wie breit sind die weißen Streifen, wenn ihre Fläche gleich der Fläche der roten Felder ist?
- c) Wie groß ist die schraffierte Fläche innerhalb des gleichseitigen Dreiecks, wenn alle Kreisbögen den Radius 1 haben?



8. Ein L-förmiger Block wird wie abgebildet aus 63 weißen Einheitswürfeln gebildet.
- a) Wie groß ist die Oberfläche?
- b) Welchen Abstand haben A und B ?
- c) Bei dem L-förmigen Block wird die ganze Oberfläche rot angestrichen. Wie viele der 63 Würfel haben genau
- eine rote Fläche,
  - zwei rote Flächen,
  - drei rote Flächen?
  - Wie viele Würfel haben keine rote Fläche?

