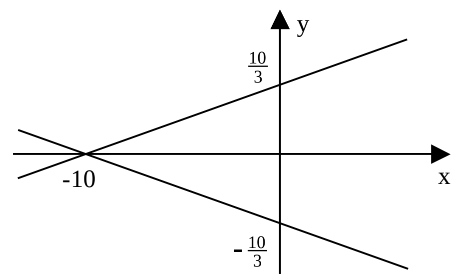
Mathematikwettbewerb 2003 der Jahrgangsstufe 11

Lösungen

Hinweise zur Bewertung:

- Bei jeder Aufgabe können maximal 12 Punkte erreicht werden, wobei die fünf besten Aufgaben gewertet werden. Insgesamt sind also maximal 60 Punkte zu erreichen.
- Für jede Teilaufgabe ist ein Lösungsweg und die zugehörige Punktzahl vorgegeben. Bei anderen bzw. unvollständigen Lösungen sind die Punkte nach eigenem Ermessen zu verteilen, wobei die angegebene Punktzahl für die Teilaufgaben eingehalten werden sollte.

1. a) Aus $\frac{b-3}{5-4}=\frac{3-(-3)}{4-2}$ folgt $b=6$. ***4 P***



b) Aus $x-3y+10=0$ folgt $y=\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$. ***4 P***

Aus $y=-\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}$ folgt $m=-\frac{1}{3}, b=-\frac{10}{3}$.

c) Aus $x+2y=3$ folgt $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$. ***4 P***

Aus $3y+ax=2$ folgt $y=-\frac{a}{3}x+\frac{2}{3}$.

$\Big\}$ Aus $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)=-1$ folgt $a=-6$.

2. a) $\frac{2^{2003}+2^{2001}}{2^{2002}-2^{2000}}=\frac{2^{2001}(2^2+1)}{2^{2000}(2^2-1)}=2\cdot\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$ ***3 P***

b) $2*(-1)=2^{-1}-(-1)^2=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ ***3 P***

c) Aus $\log_{10}\left(2x-x^2\right)=0$ folgt $2x-x^2=1$, also $(x-1)^2=0$ und somit $x=1$. ***3 P***

d) Es gilt $f(0)+f(-1)=2c-5$. Die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl ist immer ungerade. ***3 P***

3. a) Die Zahl n steht in der Folge an der Stelle $1+2+3+...+n$ zum letzten Mal. ***4P***

Es gilt $1+2+3+4+...+n=\frac{n}{2}(n+1)=\begin{cases}91 & \text{für } n=13\\ 105 & \text{für } n=14\end{cases}$

Also ist das 100. Folgeglied 14.

b) Die Auswahl der beiden Stellen für die zwei gleichen Ziffern kann auf $\binom{4}{2}=6$ Arten erfolgen. Also gibt es $6\cdot9\cdot8\cdot7=3024$ Zahlen. ***4 P***

c) Jede der 10 Strecken schneidet jede der 9 anderen genau einmal. Dabei wird jeder dieser 90 Schnittpunkte zweimal gezählt, also gibt es 45 Schnittpunkte. ***4 P***

4. a) Sei l die Kerzenlänge am Anfang, sowie l_1 und l_2 die Länge der Kerzen nach t Stunden. Dann gilt $l_1 = l - \frac{t}{4} l$ und $l_2 = l - \frac{t}{3} l$. Aus $l_1 = 2l_2$ folgt $t = \frac{12}{5}$, d.h. die gesuchte Zeit ist 2 h 24 min. **4 P**

b) Aus $10 \cdot 3^n > 10^6$ folgt $n > \frac{\log 10^5}{\log 3} \approx 10{,}5$. Also überschreitet die Population im 11. Monat die Millionengrenze. **4 P**

c) Sei s die Summe aller Alter. Dann gilt $38 = \frac{s}{50}$ und das durchschnittliche Alter ist **4 P**

$\frac{1}{48}(s - 33 - 43) = \frac{1}{48}(38 \cdot 50 - 76) = 38$.

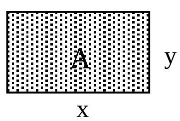
---

5. a) Aus $a = 1{,}5 \cdot c$ und $b = 1{,}25 \cdot c$ folgt $a = 1{,}2 \cdot b$, also ist a um 20% größer als b. **4 P**

b) (i) $0{,}75^3 \approx 0{,}42 = 42\%$ (ii) $0{,}75^{\frac{1}{2}} \approx 0{,}87 = 87\%$ **4 P**

c) 4% von 100 g sind 4 g Trockenmasse. Dies sind nach der Wasseraufnahme 2%. Also wiegt der Pilz nun 200 g. **4 P**

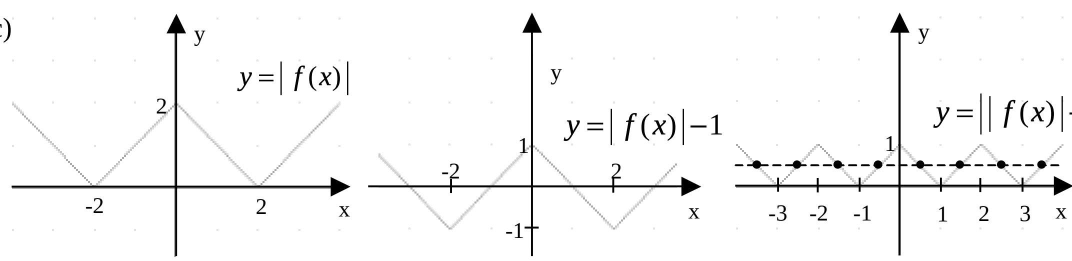
---

6. a) 

Es gilt $2x + 2y = 20$. Somit ist die Fläche $A = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 25 - (x-5)^2$ maximal für $x = 5$, d.h. wenn ein Quadrat vorliegt. **4 P**

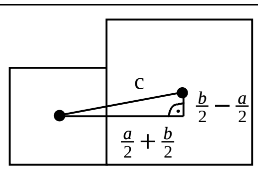
b) Wegen $y = 3x - x^2 + c = c + \frac{9}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ hat der Scheitel der Parabel die Koordinaten $\left(\frac{3}{2} \middle| c + \frac{9}{4}\right)$, also muss $c = -\frac{9}{4}$ sein. **4 P**

c) **4 P**

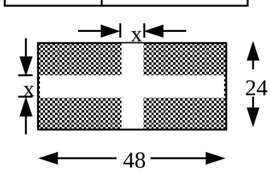


Also gibt es 8 Lösungen.

---

7. a) 

$$c^2 = \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$ **4 P**

b) 

Aus $\frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 24 = 48x + 24x - x^2$ folgt $x^2 - 72x + 576 = 0$ und $(x - 36)^2 = 720$, also $x = 12\left(3 - \sqrt{5}\right)$. **4 P**

c) Die schraffierte Fläche kann als Differenz zwischen der Dreiecksfläche und drei Sechstelkreisen berechnet werden: $\frac{2^2}{4}\sqrt{3} - 3\frac{\pi \cdot 1^2}{6} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$. **4 P**

8. a) Oberfläche: $2 \cdot 21 + 2 \cdot 18 + 2 \cdot 15 = 108$. **_2 P_**

b) Abstand: $\sqrt{3^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{70}$. **_2 P_**

c)

Anzahl der roten Flächen	Obere und untere Schicht	Mittlere Schicht	Anzahl		
0	0	4	4	(iv)	**_2 P_**
1	4 + 4	12	20	(i)	**_2 P_**
2	12 + 12	5	29	(ii)	**_2 P_**
3	5 + 5	0	10	(iii)	**_2 P_**
		Summe:	63		

Für Ihre Auswertungen (zur Übernahme auf den Rückmeldebogen):

Ergebnisse bezüglich der Einzelaufgaben:

Aufgabe	Anzahl der Schüler/innen Nicht bearb.	0-3 Pkte	4-6 Pkte	7-9 Pkte	10-12 Pkte
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

Gesamtergebnisse:

Erreichte Punktzahl	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	51-55	56-60
Anzahl Schüler/innen												

Teilnehmerzahl: .... Durchschnittlich erreichte Punktzahl: ....

! Versäumen Sie bitte nicht, uns bis zum **14. März 2003** die **Schulsiegerin** bzw. den **Schulsieger** zu melden (Vor-, Nachname, Geschlecht, erreichte Punktzahl). Die Schulsiegerinnen und Schulsieger erhalten, wenn sie **mindestens 30 Punkte** erreicht haben, eine Urkunde und einen Sachpreis. !