

## Mathematikwettbewerb 2004 der Jahrgangsstufe 11

**Hinweis:** Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

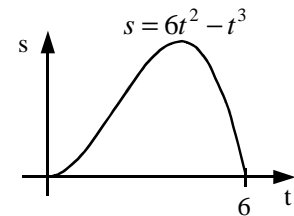
Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. a) Nicole startet zu einer 40 km langen Fahrradtour. Nachdem sie die halbe Strecke zurückgelegt hat, stellt sie fest, dass ihre Durchschnittsgeschwindigkeit 15 km/h betrug. Sie entscheidet sich schneller zu fahren. Berechnen Sie, mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit Nicole den Rest der Strecke fahren muss, um insgesamt eine mittlere Geschwindigkeit von 20 km/h für die 40 km lange Strecke zu erreichen! Zeichnen Sie ein Weg-Zeit-Diagramm!

- b) Uwe verlässt die Schule jeden Tag um die gleiche Zeit mit dem Fahrrad. Wenn er mit 20 km/h fährt, ist er um 14:00 Uhr zu Hause. Wenn er mit 10 km/h fährt, kommt er um 15:00 Uhr zu Hause an. Mit welcher Geschwindigkeit muss er fahren, damit er um 14:20 Uhr zu Hause eintrifft?

- c) Ein Auto hat nach  $t$  Sekunden den Weg  $s(t) = 6t^2 - t^3$ ,  $0 \leq t \leq 6$ , zurückgelegt.

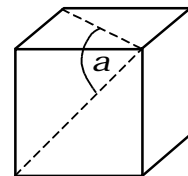
- (i) Wann fährt der Wagen vorwärts, zu welcher Zeit fährt er rückwärts?  
(ii) Wann wird der Wagen gebremst, wann wird Gas gegeben?



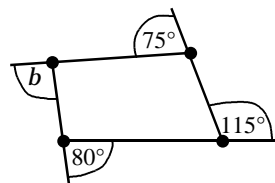
Hinweis: Die Geschwindigkeit  $v$  ist die Ableitung des Weges  $s$  nach der Zeit  $t$ :  $v(t) = s'(t)$ ;  $v$  ist also die Steigung der Tangente an die Weg-Zeit-Funktion.

Die Beschleunigung  $a$  ist die Ableitung der Geschwindigkeit  $v$  nach der Zeit:  $a(t) = v'(t)$ .

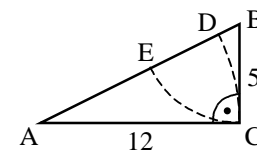
2. a) Wie groß ist in einem Würfel der Winkel  $a$  zwischen zwei Flächendiagonalen?



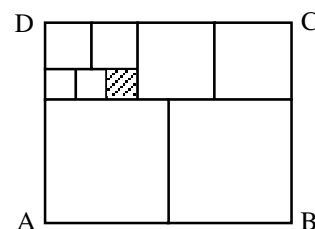
- b) Berechnen Sie den Winkel  $b$ !



- c) Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Katheten der Länge 5 und 12. Die Kreise um A und B, die jeweils durch C gehen, schneiden die Hypotenuse AB in D bzw. E. Berechnen Sie DE!



- d) Das Rechteck ABCD ist in 9 Quadrate zerlegt. Das schraffierte Quadrat hat den Umfang 8. Berechnen Sie Umfang und Fläche des Rechtecks ABCD!



Dieser Wettbewerb wird veranstaltet von:



Zentrum für  
Mathematik e.V.

in Kooperation mit:



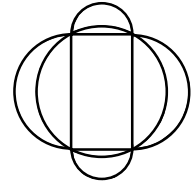
Hessisches  
Kultusministerium

Ciba

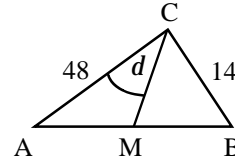


Ciba Spezialitätenchemie  
Lampertheim GmbH

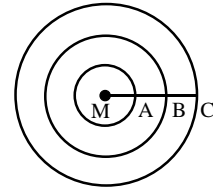
3. a) Bei einem Rechteck werden der Umkreis und die Halbkreise über den Seiten gezeichnet. Zeigen Sie:  
Die (schraffierte) Fläche innerhalb der Halbkreise und außerhalb des Umkreises ist gleich der Fläche des Rechtecks.



- b) Bei einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Kathetenlängen 14 und 48 sei M der Mittelpunkt der Hypotenuse und  $d = \angle ACM$ . Berechnen Sie  $\cos d$  !

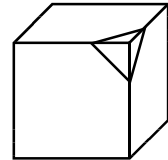


- c) Für drei Kreise mit dem gemeinsamen Mittelpunkt M gilt  $MA = MB = MC = 1$ . Berechnen Sie das Verhältnis der (waagrecht schraffierten) Fläche des mittleren Kreisringes zur Fläche des (senkrecht schraffierten) äußeren Kreisringes!

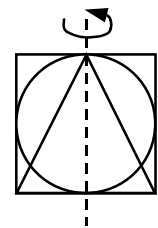


4. a) Bei einem Würfel wird jede Kante um 1 cm verlängert. Die Würfeloberfläche vergrößert sich dadurch um  $78 \text{ cm}^2$ . Berechnen Sie die Kantenlänge des Ausgangswürfels!

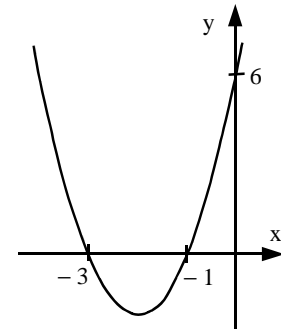
- b) Starten Sie mit einem Würfel.  
1. Schritt: Teilen Sie jede Kante in 3 Teile.  
2. Schritt: Verbinden Sie diese Dreiteilungspunkte, so dass an jeder Ecke ein Tetraeder entsteht.  
3. Schritt: Schneiden Sie jeden dieser Tetraeder ab.  
4. Schritt: Wenden Sie die Schritte Nr. 1 bis Nr. 3 auf den neuen Körper an.  
(i) Wie viele Ecken und Kanten hat der Körper nach dem 3. Schritt?  
(ii) Wie viele Flächen hat der Körper nach dem 4. Schritt?



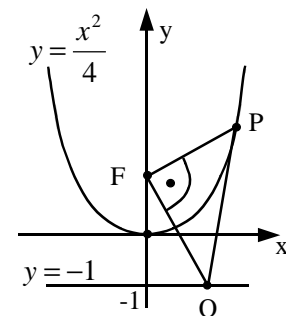
- c) Ein Quadrat, sein Inkreis (Radius 1) und das einbeschriebene gleichschenklige Dreieck rotieren um die gemeinsame Symmetrieachse. Berechnen Sie jeweils das Volumen der drei dabei entstandenen Körper!



5. a) Für welche  $b$  liegt der Scheitel der Parabel  $y = -x^2 + bx - 4$  auf der  $x$ -Achse?  
b) Gegeben sind die Parabeln  $y = x^2 + tx + 1$ , wobei  $t$  die reellen Zahlen durchläuft.  
Auf welcher Kurve liegen die Scheitel dieser Parabeln?  
c) Die Funktion  $y = ax^2 + bx + c$  schneidet die  $y$ -Achse bei 6 und die  $x$ -Achse bei  $-1$  und  $-3$ . Bestimmen Sie  $a$ ,  $b$  und  $c$ !



6. a) Für welche Winkel  $a$  mit  $0^\circ \leq a \leq 180^\circ$  gilt  $\sqrt{1 + \cos a} = \sin a$  ?  
b) Für welches positive  $x$  ist  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  minimal ?  
c) Der Punkt  $P(a \mid \frac{a^2}{4})$  liegt auf der Parabel  $y = \frac{x^2}{4}$ . Die Tangente in P schneidet die Gerade  $y = -1$  in Q. Es sei  $F(0 \mid 1)$  und  $a \neq 0$ . Zeigen Sie, dass FQ senkrecht auf FP steht!



- 
7. a) Mit  $n!$  wird das Produkt  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  bezeichnet, z.B.  $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ .  
Für welches  $n$  gilt  $n! = 2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$ ? Begründen Sie Ihre Lösung!
- b) Es gibt  $5! = 120$  mögliche Anordnungen der 5 Buchstaben CLAUS. Diese sind in lexikographischer (alphabetischer) Ordnung aufgeschrieben.  
Welches ist der erste und der letzte Buchstabe des 73. Wortes?
- c) Die Folge  $a_0, a_1, a_2, \dots$  wird definiert durch  $a_0 = 2$ ,  $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ .  
Berechnen Sie  $a_1, a_2, a_3, a_4$  und  $a_{2004}$ !
- 
8. a) Ein Geschäft hat T-Shirts im Angebot. Kauft man zwei T-Shirts zum regulären Preis, so erhält man ein drittes T-Shirt für 1 €. Zwölf T-Shirts werden für 120 € verkauft. Welches ist der reguläre Preis für ein T-Shirt?
- b) Caro und Sam essen in einem Restaurant. Caros Bestellung ist doppelt so teuer wie die von Sam. Caro gibt 15 % Trinkgeld, Sam gibt 20 % Trinkgeld. Der Gesamtbetrag einschließlich Trinkgeld beträgt für beide zusammen 70 €. Wie teuer waren die Bestellungen von Caro und Sam?
- c) Eine Zahnpastatube enthält 75 ml Paste. Die Öffnung der Tube ist kreisförmig mit 6 mm Durchmesser. Wie viele Zentimeter lang wird der Zahnpastastrang sein, den man aus der Tube pressen kann?
- 

