

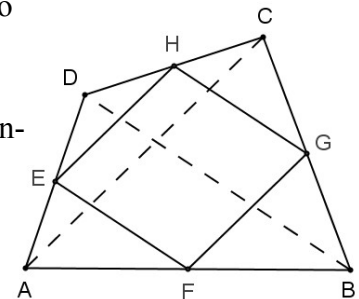
## Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb der Einführungsphase am 15. Februar 2012

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb der Einführungsphase (MW-E) werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 1. Februar 2012 unter <http://www.z-f-m.de> im Bereich Projekte – MW-E.

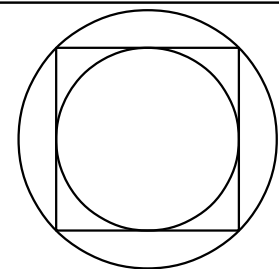
1. Verbindet man in einem beliebigen Viereck  $ABCD$  die Seitenmitten  $E, F, G$  und  $H$ , so erhält man immer ein Parallelogramm, denn nach dem Strahlensatz sind z. B. die Seiten  $EF$  und  $GH$  parallel zur Diagonalen  $BD$  und halb so lang wie diese.

- a) Welche Eigenschaft hat das Viereck  $ABCD$ , wenn das Mittenviereck  $EFGH$
- (i) eine Raute ist?                      (ii) ein Quadrat ist?
- b) Gegeben sind die Punkte  $A(2|8)$ ,  $B(0|0)$  und  $C(4|2)$ .  
Wie muss der Punkt  $D(a|b)$  gewählt werden, damit das Mittenviereck von  $ABCD$  ein Quadrat ist?

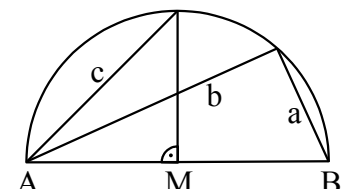


2. a) Bestimmen Sie den Rest von  $3^{2012} : 7$ .
- b) Finden Sie drei Primzahlen, die Teiler von  $3^{16} - 2^{16}$  sind.

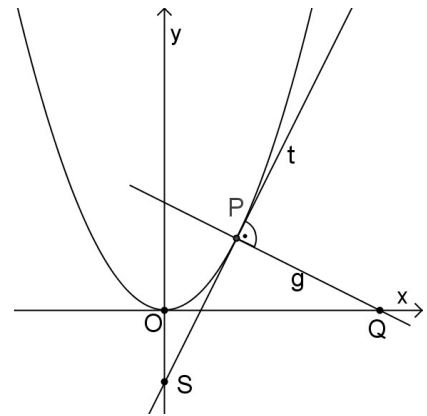
3. a) Gegeben ist ein Quadrat mit der Seitenlänge  $a$ .  
Bestimmen Sie die Radien von In- und Umkreis in Abhängigkeit von  $a$ .



- b) Gegeben ist der Halbkreis über  $AB$  mit Mittelpunkt  $M$ .  
Welche Beziehung besteht zwischen  $a, b$  und  $c$ ?

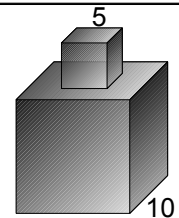
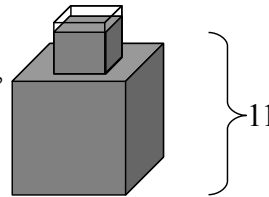


4. Gegeben seien die Parabel  $y=x^2$ , ein Parabelpunkt  $P(p \mid p^2)$ ,  $p > 0$ , und die Tangente  $t$  in  $P$  (Steigung  $2p$ ).
- Berechnen Sie die Gleichung der Geraden  $g$  durch  $P$ , die senkrecht auf der Tangente  $t$  steht (in Abhängigkeit von  $p$ ).
  - Sei  $Q$  der Schnittpunkt von  $g$  mit der  $x$ -Achse und  $S$  der Schnittpunkt von  $t$  mit der  $y$ -Achse. Berechnen Sie die Koordinaten von  $Q$  und  $S$  (in Abhängigkeit von  $p$ ).
  - Wie muss  $P$  gewählt werden, damit  $\frac{OQ}{OS}$  minimal wird?

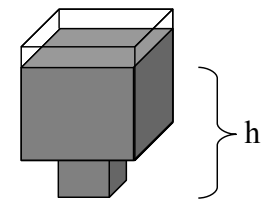


5. Ein Wassertank besteht aus einem großen Würfel (Kantenlänge 10 dm) und einem aufgesetzten kleinen Würfel (Kantenlänge 5 dm).

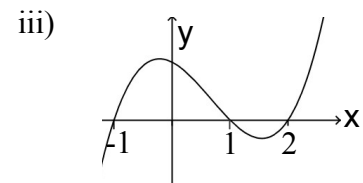
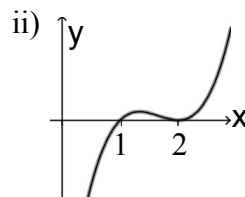
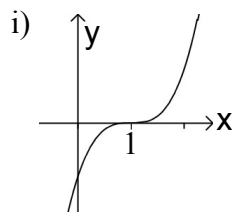
Der Tank ist teilweise mit Wasser gefüllt, das 11 dm hoch steht.



Wie hoch steht das Wasser, wenn der Tank umgedreht wird?



6. Die kubische Parabel  $y=x^3+ax^2+bx+c$  kann 1, 2 oder 3 reelle Nullstellen haben:



Berechnen Sie für jeden der drei Fälle die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

7. a) Wie viele Zahlen von  $1, 2, \dots, 199$  sind weder durch 3 noch durch 5 teilbar?
- b) Wenn man alle Zahlen von 10 bis 99 aufschreibt, wie viele gerade Ziffern hat man dann aufgeschrieben?  
Hinweis: Bei den Zahlen 20 und 86 hat man jeweils zwei gerade Ziffern aufgeschrieben.
- 
8. a) Ein Barrel (160 l) Rohöl kostet 107\$.  
Wie viel Euro kostet ein Liter Rohöl?  
(Wechselkurs:  $1 \text{ €} = 1,4 \text{ \$}$ )
- b) Ein Jeep namens „Hummer“ braucht für 12 Meilen (m) eine Gallone (g) Benzin, in Kurzschreibweise 12 mpg („miles per gallon“).  
Wie viel Liter Benzin verbraucht der Hummer auf 100 km?  
( $1 \text{ m} = 1,6 \text{ km}$ ,  $1 \text{ g} = 3,8 \text{ l}$ )
- c) Eine halbe Gallone Mineralwasser kostet in den USA 1,28\$.  
Wie viel Euro kostet ein Liter Mineralwasser?
- d) Bei windstillem Wetter fliegt ein Flugzeug von  $A$  nach  $B$  und zurück in genau 2 Stunden.  $A$  liegt 200km westlich von  $B$ .  
Bei einem gleichmäßigen Westwind braucht das Flugzeug für den Rundflug 5 Minuten länger.  
Berechnen Sie die Windgeschwindigkeit.
- e) In einer Schulklasse soll ein Ausschuss mit 4 Mitgliedern gewählt werden, und zwar soll er aus 2 Mädchen und 2 Jungen bestehen.  
Die Auswahl des Ausschusses ist auf 7920 Arten möglich.  
Wie groß ist die Klasse?