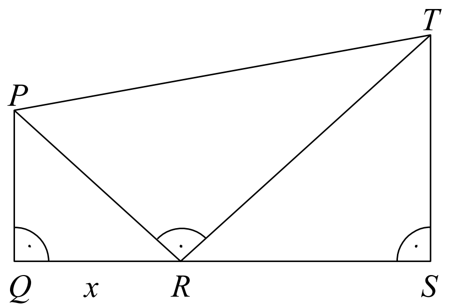
Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2015 am 11.02.2015

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb MW-E der Eingangsstufe werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.
Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 1. Februar 2015 unter http://www.z-f-m.de im Bereich Projekte – MW-E.

1. In der Abbildung ist $PQ = 8$, $TS = 12$ und $QS = 20$.
   Finden Sie $x := QR$ so, dass $\sphericalangle TRP = 90°$.



---

2. Wählen Sie eine zweistellige Zahl.
   Vertauschen Sie die Einerziffer mit der Zehnerziffer.
   Addieren Sie die beiden Zahlen.
   Zum Beispiel $42+24 = 66$, $29+92 = 121$.

   a) Welchen gemeinsamen Teiler haben 66 und 121?
   Gilt dies auch für andere zweistellige Zahlen?
   Überprüfen Sie Ihre Vermutung an drei weiteren Beispielen.

   b) Beweisen Sie Ihre Vermutung für eine beliebige zweistellige Zahl ab.

---

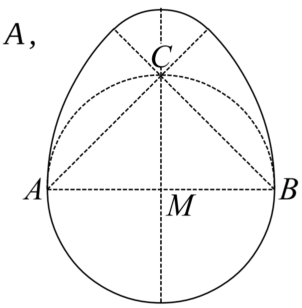
3. Das Ei in der Abbildung wird begrenzt durch einen Halbkreis um M über AB, zwei Kreisbögen um A durch B bzw. um B durch A, sowie einen Viertelkreis um C.

   Berechnen Sie

   a) die Radien und Längen der vier Kreisbögen,

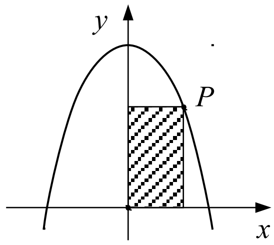
   b) den Umfang U,

   c) die Fläche F des Eis.



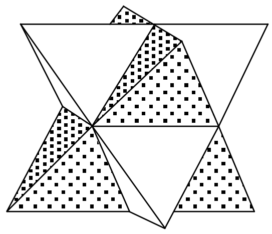
4. Ein Rechteck im Koordinatensystem liegt im 1. Quadranten mit einer Ecke im Koordinatenursprung und zwei Seiten auf den Koordinatenachsen. Die vierte Ecke P liegt auf der Parabel $y = 12 - x^2$.
Wie muss P auf der Parabel gewählt werden, damit das Rechteck maximale Fläche hat? Wie groß ist diese maximale Fläche?

   Hinweis: Zur Berechnung des Maximums ohne Differenzialrechnung ist die Formel $3b^2x - x^3 = 2b^3 - (x-b)^2 \cdot (x+2b)$ hilfreich.



---

5. Zwei reguläre Tetraeder mit gleicher Kantenlänge durchdringen einander so, dass jede Fläche durch die Mittelpunkte von drei Kanten geht, die von einer Ecke ausgehen. Die Vereinigung V der beiden Tetraeder ist ein dreidimensionaler „Stern“.



   a) Sei D der Körper, der aus allen Punkten besteht, die zu beiden Tetraedern gehören.
   Beschreiben Sie diesen „Durchdringungskörper“!

   b) In welchem Verhältnis stehen die Volumen von V und D ?

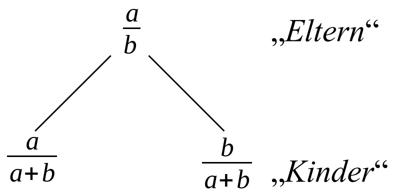
---

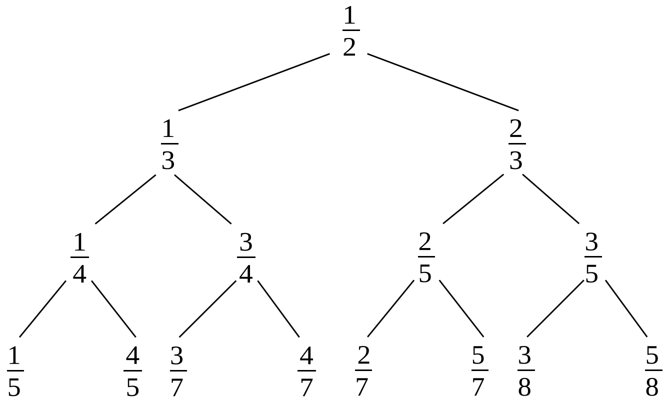
6. a) Zeichnen Sie im ersten Quadranten die Parabel $y = x^2$ und den Kreis mit dem Mittelpunkt $M\left(1\middle|\frac{1}{2}\right)$, der durch den Koordinatenursprung $(0|0)$ geht.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes $P(a|b)$, $a,b \neq 0$, von Parabel und Kreis.

   b) Zeichen Sie im *x*-*y*-Koordinatensystem die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \text{ und für } x > 2 \\ |2x-3|-1 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

7. Die Konstruktion des Baumdiagramms erfolgt nach der Regel





Jeder Bruch hat zwei *Kinder*, zum Beispiel haben die *Eltern* $\frac{2}{3}$ die *Kinder* $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$.

Das linke *Kind* ist kleiner als $\frac{1}{2}$, das rechte *Kind* ist größer als $\frac{1}{2}$.

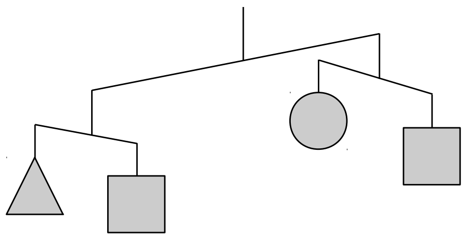
a) Berechnen Sie die 16 Brüche in der nächsten Reihe.

b) Welches Geschwister hat $\frac{3}{14}$?

c) Welches sind die Großeltern von $\frac{14}{17}$?

---

8. Das abgebildete Mobile ist nicht im Gleichgewicht, da Kreis, Quadrat und Dreieck unterschiedliche Gewichte sind.



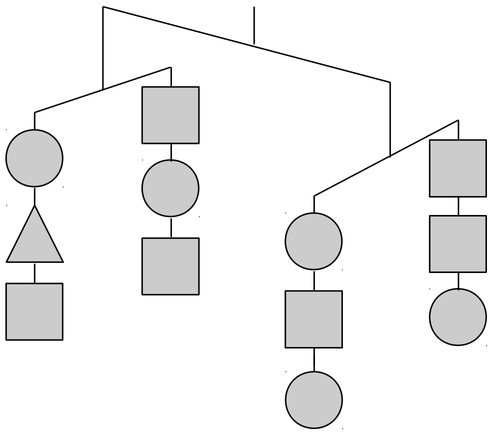
Aus △ < □ (links),

○ < □ (rechts) und

○ + □ < △ + □ (insgesamt)

folgt ○ < △ < □.

Welche Ungleichung für die unterschiedlich geformten Gewichte folgt aus dem abgebildeten Mobile?



Lösungen zu den Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2015 am 11.02.2015

1. <u>1. Lösung:</u>
Es gilt $PT^2 = 20^2+(12-8)^2 = 416$
und $PT^2 = PR^2+RT^2$
$= 64+x^2+144+(20-x)^2 = 2x^2-40x+608$
Aus $2x^2-40x+608 = 416$ folgt $0 = x^2-20x+96 = (x-8)\cdot(x-12)$,
also $x=8$ oder $x=12$.

<u>2. Lösung:</u>
Im Koordinatensystem mit $Q(0|0)$ haben PR und RT die Steigungen
$-\frac{8}{x}$ bzw. $\frac{12}{20-x}$.
Wegen $PR\perp RT$ gilt $-\frac{8}{x}\cdot\frac{12}{20-x} = -1$.
Aus $x(20-x) = 96$ folgt $0 = x^2-20x+96 = (x-8)(x-12)$ und somit $x = 8$ oder $x = 12$.

2. a) $12+21 = 33 = 3\cdot 11$
$98+89 = 187 = 17\cdot 11$
$41+14 = 55 = 5\cdot 11$
Vermutung: Man erhält immer eine durch 11 teilbare Zahl.

b) $ab+ba = (10a+b)+(10b+a) = 11\cdot(a+b)$.

3. a)

Kreisbogen um	M	A	B	C
Radius	a	$2a$	$2a$	$2a-a\sqrt{2}$
Länge	$\pi\cdot a$	$\frac{\pi\cdot 4a}{8}$	$\frac{\pi\cdot 4a}{8}$	$\frac{\pi a(2-\sqrt{2})\cdot 2}{4}$

b) $U = \pi\cdot a+2\cdot\frac{\pi\cdot 4a}{8}+\frac{\pi\cdot a(2-\sqrt{2})\cdot 2}{4} = \pi\cdot a\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $F = \frac{\pi a^2}{2}+2\cdot\frac{\pi(2a)^2}{8}-a^2+\frac{1}{4}(2a-a\sqrt{2})^2 = \pi a^2(3-\sqrt{2})^2$

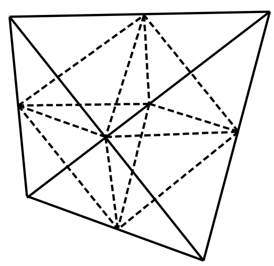
4. Mit $P\left(x\middle|12-x^2\right)$ ergibt sich für die Fläche f in Abhängigkeit von x
$f(x)=x\cdot\left(12-x^2\right),\quad 0<x<\sqrt{12}$.

<u>1. Lösung:</u>
Es gilt (vgl. Hinweis) $f(x)=12x-x^3=16-(x-2)^2\cdot(x+4)$.
Da $x+4>0$ ist, wird f maximal für $x=2$ mit $f(2)=16$.

<u>2. Lösung:</u>
Aus $f'(x)=12-3x^2=0$ folgt $x{=}2$. Wegen $f''(x)=-6x<0$ für $x=2$
hat f für $x=2$ ein Maximum mit $f(2)=2\cdot\left(12-2^2\right)=16$

---

5. a) Der Durchdringungskörper hat 12 Kanten und 8 gleichseitige Dreiecke als Flächen. *D* ist ein Oktaeder.



b) Der Oktaeder *D* entsteht dadurch, dass von einem Tetraeder (Volumen *T*) vier kleine Tetraeder mit halber Kantenlänge abgeschnitten werden.

Daher ist das Volumen jedes dieser kleineren Tetraeders $\frac{1}{8}T$.

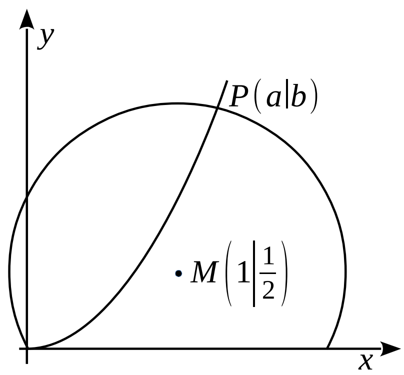
Also ist das Oktaedervolumen $D=T-4\cdot\frac{T}{8}=\frac{T}{2}$ und

$V=T+4\cdot\frac{T}{8}=\frac{3}{2}T$.

Somit ist $\frac{V}{D}=3$.

---

6. a) Der Radius des Kreises ist $r=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.



Wegen $PM=r$ gilt $(a-1)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$ und

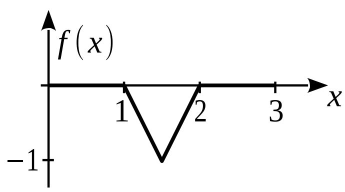
somit $a^2+b^2=b+2a$.

Weiterhin gilt $b=a^2$.

Hieraus folgt $a^3=2$ und $b^3=4$,
also $P\left(\sqrt[3]{2}\middle|\sqrt[3]{4}\right)$.

b) Für $1\le x\le 1{,}5$ gilt $f(x)=-(2x-3)-1=-2x+2$.

Für $1{,}5<x\le 2$ gilt $f(x)=(2x-3)-1=2x-4$.



7. a)

$$\frac{1}{5}: \ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6} \qquad \frac{4}{5}: \ \frac{4}{9},\ \frac{5}{9} \qquad \frac{3}{7}: \ \frac{3}{10},\ \frac{7}{10} \qquad \frac{4}{7}: \ \frac{4}{11},\ \frac{7}{11}$$

$$\frac{2}{7}: \ \frac{2}{9},\ \frac{7}{9} \qquad \frac{5}{7}: \ \frac{5}{12},\ \frac{7}{12} \qquad \frac{3}{8}: \ \frac{3}{11},\ \frac{8}{11} \qquad \frac{5}{8}: \ \frac{5}{13},\ \frac{8}{13}$$

b) Das Geschwister von $\frac{3}{14}$ ist $1-\frac{3}{14}=\frac{11}{14}$.

c) Für die Eltern $\frac{a}{b}$ von $\frac{14}{17}\left(>\frac{1}{2}\right)$ gilt $\frac{b}{a+b}=\frac{14}{17}$, also $\frac{a}{b}=\frac{3}{14}$.

Für die Eltern $\frac{a}{b}$ von $\frac{3}{14}\left(<\frac{1}{2}\right)$ gilt $\frac{a}{a+b}=\frac{3}{14}$, also $\frac{a}{b}=\frac{3}{11}$.

Somit sind $\frac{3}{11}$ die Großeltern von $\frac{14}{17}$.

---

8. Aus □ + ○ + □ < ○ + △ + □ (links) folgt □ < △.

Aus □ + □ + ○ < ○ + □ + ○ (rechts) folgt □ < ○.

Aus □ + □ + □ + ○ + ○ + △ < ○ + ○ + ○ + □ + □ + □ (insgesamt) folgt △ < ○.

Also □ < △ < ○.