

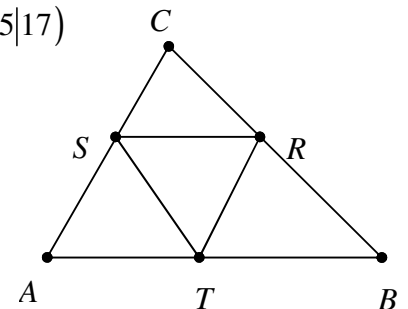
## Musteraufgaben zum Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 am 16.02.2011

**Hinweis:** Beim Mathematikwettbewerb der Jahrgangsstufe 11 werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 1. Februar 2011 unter <http://www.z-f-m.de> im Bereich Projekte – MW11.

1. Im  $(x, y)$ -Koordinatensystem sind  $R(6|10)$ ,  $S(9|13)$  und  $T(5|17)$  die Seitenmitten eines Dreiecks  $ABC$ .

- a) Zeichnen Sie  $R$ ,  $S$  und  $T$  in ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die Koordinaten von  $A$ ,  $B$  und  $C$ .
- b) Wie groß ist der Winkel  $\sphericalangle TSR$ ?
- c) Welche Fläche hat das Dreieck  $ABC$ ?
- d) Wie groß ist der Umkreisradius vom Dreieck  $ABC$ ?



2. a) Für welche  $x$  gilt  $16^x + 32 = 9 \cdot 2^{2x+1}$ ?

- b) Setzt man in  $a^2 - 440$  für  $a = 57$ , so erhält man eine Quadratzahl:  $57^2 - 440 = 53^2$ .

Bestimmen Sie alle weiteren natürlichen Zahlen  $a$ , für die  $a^2 - 440$  eine Quadratzahl ist.

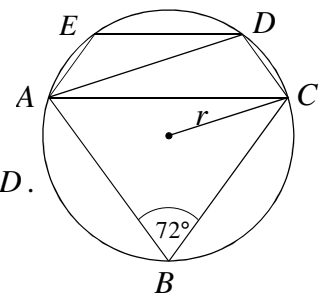
3. a) In dem Sehnenfünfeck ist das Dreieck  $ABC$  gleichschenkelig mit dem Scheitelwinkel von  $72^\circ$ . Die Vierecke  $ABCD$  und  $ACDE$  sind gleichschenklige Trapeze.

- (i) Berechnen Sie die Winkel  $\sphericalangle BAC$ ,  $\sphericalangle CAD$ ,  $\sphericalangle ADC$  und  $\sphericalangle AED$ .

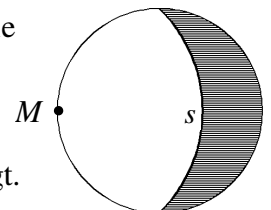
- (ii) Es ist  $\cos 36^\circ = \frac{\varphi}{2}$  und  $\cos 72^\circ = \frac{1}{2\varphi}$

mit  $\varphi := \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$  (Goldener Schnitt).

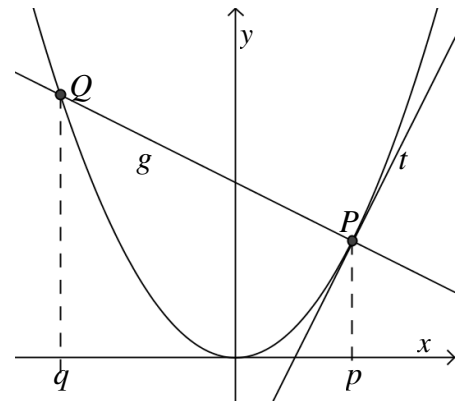
Berechnen Sie  $AB$  und  $CD$  für  $r = 1$ .



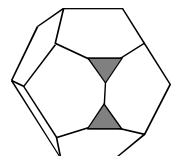
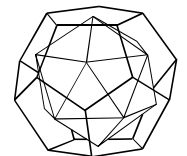
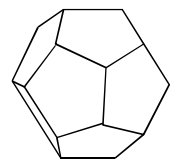
- b) Die Begrenzungen der Mondsichel sind immer Kreisbögen, die durch die Endpunkte eines Kreisdurchmessers verlaufen. Bei einer bestimmten Mondphase liegt der Mittelpunkt  $M$  der Schattengrenze  $S$  auf dem Umfang der Mondscheibe. Berechnen Sie, wie viel Prozent der Mondscheibe nicht im Schatten liegt.



4. Gegeben seien die Parabel  $y = x^2$ , ein Parabelpunkt  $P(p | p^2)$ ,  $p > 0$ , und die Tangente  $t$  in  $P$  (Steigung  $2p$ ).
- Berechnen Sie die Gleichung der Geraden  $g$  durch  $P$ , die senkrecht auf der Tangente steht (in Abhängigkeit von  $p$ ).
  - Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes  $Q(q | q^2)$  von  $g$  mit der Parabel (in Abhängigkeit von  $p$ ).
  - Wie muss  $P$  gewählt werden, damit der Abstand  $d$  von  $Q$  zum Koordinatenursprung minimal wird?

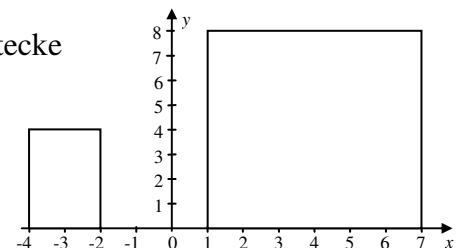


5. Ein Dodekaeder wird durch zwölf regelmäßige Fünfecke begrenzt.
- Wie viele Ecken und Kanten hat ein Dodekaeder?
  - Verbindet man bei einem Dodekaeder die Flächenmitten mit den Mittelpunkten benachbarter Flächen, so erhält man das Kantenmodell eines Körpers.  
Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat dieser Körper?
  - Schneidet man bei einem Dodekaeder alle Ecken ab (vgl. Abb.), so erhält man einen sogenannten Dodekaederstumpf.  
Durch welche und wie viele Flächen ist er begrenzt?  
Wie viele Ecken und Kanten hat er?



6. a) Im Koordinatensystem sind die beiden abgebildeten Rechtecke gegeben.

Welche Gerade teilt die beiden Rechtecke gleichzeitig in zwei flächengleiche Gebiete?



- Der Graph der Funktion  $y = 2^x$  wird
  - an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelt bzw.
  - um  $90^\circ$  im Gegenuhrzeigersinn um den Koordinatenursprung gedreht.
 Welche Funktionen beschreiben die beiden neuen Graphen von (i) und (ii)?

7. a) Aus einer Urne mit 4 roten und 4 schwarzen Kugeln werden 2 Kugeln mit einem Griff entnommen.  
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide
- rot sind,
  - gleiche Farbe haben,
  - verschiedene Farben haben?
- b) Welches ist die größte natürliche Zahl  $n$ , für die  $2^n$  Teiler von  $32! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 32$  ist?
- c) Welches ist die letzte Ziffer (Einerziffer) von  $3^{2011}$ ?

8. a) In einer Untersuchung wurden Jugendliche gefragt, ob sie die Farbe rot mögen. Genau 8% der Jungen mochten rot, während es bei den Mädchen genau 60% waren. Zusammen mochten genau 20% der Jugendlichen die Farbe rot. Wie viele Jungen und wie viele Mädchen müssen mindestens befragt worden sein?

- b) In einer Blindenschrift verwendet man Punktmuster, die sich ertasten lassen, und zwar 4 in der Höhe und 2 in der Breite. Zum Beispiel sind in der Abbildung die 4 schwarzen Punkte  $M$  und die 3 schwarzen Punkte das Prozentzeichen.
- In dem  $4 \times 2$  – Rechteck muss mindestens ein schwarzer Punkt vorhanden sein.

●	●	○	●
○	○	●	○
●	○	○	○
●	○	○	●

$M$

%

- ( i ) Wie viele Zeichen sind insgesamt möglich?
- ( ii ) Wie viele Zeichen sind mit 1, 2 und 3 Punkten möglich?